Die Sasaki-Metrik auf dem Tangential- und dem Sphärenbündel

Diplomarbeit

vorgelegt am 22. März 2011

**am Mathematischen Institut
der Universität zu Köln**

Name: Johannes Ulrich Fàbrega y Escatllar
Betreuer: Prof. Dr. Uwe Semmelmann

Danksagung

Ich danke all denen, die mich während meines Studiums und bei meiner Diplomarbeit begleitet und unterstützt haben, insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. Semmelmann für seine engagierte Betreuung.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Köln, den 22. März 2011

Johannes Fabrega

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Betrachtet man das Tangentialbündel TM einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), also die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume aller Punkte der Mannigfaltigkeit als Vektorbündel über M, so stellt sich die Frage, wie man auf diesem einen sinnvollen Abstandsbegriff etablieren kann. Das heißt, es stellt sich die Frage, wie sich die Riemannsche Metrik g der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit in natürlicher Weise auf ihr Tangentialbündel übertragen lässt.

Eine solche „natürliche" Metrik ist durch die *Sasaki-Metrik* gegeben, die Shigeo Sasaki 1958 in [1] erstmals auf dem Tangentialbündel und 1962 in [2] auf dem Sphärenbündel, dem Unterbündel der Einheits-Tangentialvektoren[1], definierte. Mit diesen beiden Riemannschen Mannigfaltigkeiten haben sich seitdem viele Mathematiker beschäftigt.

So definierte Peter Dombrowski 1962 in [3] eine fast komplexe Struktur auf dem Tangentialbündel und fand heraus, dass die Sasaki-Metrik bezüglich dieser Struktur eine Kähler-Metrik darstellt. Allerdings zeigte er auch, dass diese Fast-Kähler-Struktur auf dem Tangentialbündel TM für eine nicht flache Mannigfaltigkeit M niemals Kähler sein kann.

Unter Verwendung von Dombrowskis Konzept der horizontalen und vertikalen Lifts, berechnete Oldrich Kowalski 1971 in [4] den Riemannschen Krümmungstensor des Tangentialbündels mit der Sasaki-Metrik und zeigte, dass TM wiederum nur dann lokal symmetrisch sein kann, wenn M flach ist.

Dieses Resultat konnte 1988 von Musso und Tricerri verallgemeinert werden: Sie berechneten in [7] die Skalarkrümmung von TM und konnten zeigen, dass eine Mannigfaltigkeit, deren Tangentialbündel eine konstante Skalarkrümmung besitzt, bereits flach sein muss. Insbesondere bedeutet dies auch, dass TM in nicht trivialen Fällen niemals Einstein sein kann.

Mit dem Sphärenbündel SM beschäftigten sich unter anderen die Mathe-

[1] In der Literatur wird oft zwischen dem *Sphärenbündel* aller Tangentialvektoren der Länge r und dem *Einheitssphärenbündel* der Vektoren der Länge 1 unterschieden. Da wir hier ausschließlich den Fall $r = 1$ betrachten, ist es nicht nötig, diese Unterscheidung zu übernehmen.

matiker Eric Boeckx und Lieven Vanhecke. Ihnen gelang es im Jahr 2001 zu zeigen, dass das Sphärenbündel genau dann Einstein ist, wenn M entweder zum zweidimensionalen Euklidischen Raum oder zur zweidimensionalen Sphäre lokal isometrisch ist [6]. Darüber hinaus fanden sie einen neuen Beweis des Satzes von David Blair, der besagt, dass SM genau dann lokal symmetrisch ist, wenn die Krümmung von M konstant gleich Null oder gleich Eins ist. *„Blair's proof of this last result uses the natural contact metric structure of* (T_1M, g_S) *in an essential way. Our proof is more basic in that it uses only curvature information."* [6]

Ziel dieser Arbeit ist es einerseits, die hier kurz skizzierten Resultate aufeinander aufbauend und in einheitlicher Notation darzustellen, und andererseits, die in den verwendeten Artikeln oft verkürzten und ausgelassenen Beweise und Rechnungen detailliert auszuarbeiten, und zwar in konsequenter Anwendung des Konzeptes von horizontalen und vertikalen Lifts. Insbesondere werden die Riemannschen Krümmungstensoren für das Tangential- und das Sphärenbündel vollständig bestimmt.

In *Abschnitt 1.1* wird die Definition der Sasaki-Metrik auf dem Tangentialbündel nach Dombrowski bzw. Kowalski gegeben, nachdem wir zunächst die horizontalen und vertikalen Projektionen und Lifts von Vektorfeldern eingeführt haben. Um deren Analogie hervorzuheben, weichen wir leicht von der gängigen Notation ([3], [4]) ab. Es wird der Beweis von Lemma 1.9 erbracht, der bei Dombrowski und Kowalski fehlt.

Ziel des *Abschnitts 1.2* ist es, die Lie-Klammern für geliftete Vektorfelder bereitzustellen. Dazu bedarf es einiger Rechnungen in lokalen Koordinaten. In einer Art Kompromiss zwischen den Notationen von Dombrowski einerseits und der im Artikel von Boeckx und Vanhecke [5] andererseits, wird hierfür gleich zu Beginn des Abschnitts eine eigene Notation eingeführt. So lassen sich zunächst die Projektionen und anschließend die Lifts in lokalen Koordinaten ausdrücken. Die Beweise in diesem Abschnitt orientieren sich an [3].

In *Abschnitt 1.3* wird der Levi-Civita-Zusammenhang des Tangentialbündels mit der Sasaki-Metrik für geliftete Vektorfelder bestimmt.

Im ersten Teil von *Abschnitt 1.4* soll der Riemannsche Krümmungstensor des Tangentialbündels mit der Sasaki-Metrik für geliftete Vektorfelder berechnet werden. Als Tensor ist er damit bereits vollständig bestimmt. Im Unterschied zu Kowalski, berechnen wir die Riemannsche Krümmung mit Hilfe der O'Neill-Formeln für Riemannsche Submersionen. Das hierfür benötigte Lemma 1.19 findet sich auch bei Kowalski, der entsprechende Beweis wird an einigen Stellen ergänzt. Im zweiten Teil wird die Skalarkrümmung des Tangentialbündels mit Hilfe der Ricci-Krümmung für geliftete Vektorfelder (aufgeführt in Satz 1.22) berechnet und das Ergebnis in einem weiteren Schritt an die Notation von Musso und Tricerri angepasst, die dasselbe Ergebnis auf völlig anderem Wege erreichen. Für die Folgerung, dass M bei konstanter Skalarkrümmung von TM bereits flach sein muss, wird ein kurzer Beweis gegeben.

In *Abschnitt 2.1* wird ein tangentialer Lift definiert, um auch für das Sphärenbündel das Konzept der gelifteten Vektorfelder anwenden zu können. Auf SM ersetzt der tangentiale den vertikalen Lift.

In Analogie zum zweiten Kapitel werden in *Abschnitt 2.2* die Lie-Klammern und in *Abschnitt 2.3* der Levi-Civita-Zusammenhang des Sphärenbündels mit der Sasaki-Metrik für geliftete Vektorfelder berechnet. Die entsprechenden Resultate finden sich auch in [5].

Um in *Abschnitt 2.5* den Riemannschen Krümmungstensor auf dem Sphärenbündel mit Hilfe der Gauß-Formel für Untermannigfaltigkeiten zu berechnen, wird in *Abschnitt 2.4* zunächst die Zweite Fundamentalform bestimmt. Es folgen die beiden oben genannten Sätze aus [6], der zweite in etwas allgemeinerer Fassung.

Boeckx und Vanhecke liefern in [6] vollständige Beweise dieser beiden Sätze aus der Formel für den Riemannschen Krümmungstensor, auf deren Darstellung hier aber verzichtet wird, um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen. Wir beschränken uns darauf, die Beweise für alle übrigen Resultate zu führen, die sowohl in [5] wie auch in [6] ohne Beweis bleiben. Hierfür werden in Abschnitt 2.3 zusätzlich zu dem oben bereits genannten Satz zum Levi-Civita-Zusammenhang noch einige Hilfssätze formuliert und bewiesen.

In *Abschnitt 2.6* wird als kurzes Beispiel für ein Spärenbündel das Sphärenbündel der n-Sphäre untersucht und gezeigt, dass es sich als homogene Mannigfaltigkeit schreiben lässt.

In *Kapitel 3* analysieren wir die kanonische fast komplexe Struktur des Tangentialbündels mit der Sasaki-Metrik. In Anlehnung an [3] beweisen wir die oben genannten Resultate von Dombrowski. Schließlich führen wir auf dem Spärenbündel die kanonische Kontaktstruktur ein.

Kapitel 1

Das Tangentialbündel

1.1 Die Sasaki-Metrik

1.1.1 Die vertikale Projektion

Betrachtet man eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g)[1] mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇^M und ihr Tangentialbündel TM, so gibt es zwei Möglichkeiten, den Tangentialraum eines Punktes $u \in TM$, also $T_u(TM)$ auf den Tangentialraum T_pM abzubilden, wobei $p := \pi(u)$ die kanonische Projektion von u auf die Mannigfaltigkeit M ist.

Dies ist zum einen möglich über das Differential der Projektion π:

$$d_u\pi : T_u(TM) \longrightarrow T_pM.$$

Im Folgenden werden wir dieses Differential als *horizontale Projektion* π_* bezeichnen.

Zum anderen ist dies über eine *vertikale Projektion* möglich, die folgendermaßen definiert werden kann:

Definition 1.1. *Sei $\tilde{U} \subset M$ eine hinreichend kleine normale Umgebung von p und $U := \pi^{-1}(\tilde{U}) \subset TM$, so dass $U \cong \tilde{U} \times V$ ist, für einen Vektorraum V. Die Abbildung*

$$\tau_u : U \longrightarrow \pi^{-1}(p)$$

sei definiert als die Parallelverschiebung bezüglich ∇^M von Elementen aus $U \subset TM$ in die Faser durch u, und zwar für ein $x \in U$ mit $\pi(x) = q$ entlang der in $\tilde{U}$ eindeutig bestimmten Geodätischen von q nach p.

Mit i_p bezeichnen wir die Abbildung, die T_pM und $\pi^{-1}(p) \subset TM$ miteinander identifiziert.

[1] Im Folgenden sei M stets zusammenhängend.

Für $v := i_p(u) \in T_pM$ bezeichne

$$r_{-v} : T_pM \longrightarrow T_pM$$

die Abbildung, die $w \in T_pM$ auf $w - v$ abbildet.

Mit Hilfe dieser Abbildungen kann man die vertikale Projektion definieren als Differential der Funktion:

$$\begin{aligned} &\varphi : U \longrightarrow M \\ &\varphi := \exp_p \circ\, r_{-v} \circ i_p \circ \tau_u. \end{aligned}$$

Man erhält also:

$$d_u\varphi : T_u(TM) \longrightarrow T_pM.$$

Bemerkung 1.2. *In der Literatur wird diese Abbildung als „connection map“ K bezeichnet (vgl. [3]). Um die Analogie zur horizontalen Projektion π_* zu erhalten, soll diese Bezeichnung in dieser Arbeit nicht übernommen werden. Statt dessen werden wir die Bezeichnung φ_* verwenden.*

Bemerkung 1.3. *Im Gegensatz zur Projektion π hängt die Funktion φ vom Zusammenhang ∇^M auf M und außerdem von der gewählten Karte auf U und der damit verbundenen Wahl von i_p ab. Beim Übergang zum Differential geht jedoch diese Abhängigkeit von der Karte verloren.*

Bemerkung 1.4. *Um der besseren Lesbarkeit willen werden wir im Folgenden die Abbildung i_p weglassen, wenn wir bei lokalen Betrachtungen den Tangentialraum von M mit der Faser des Tangentialbündels identifizieren.*

Bemerkung 1.5. *Die horizontale Projektion ist auch für Vektorfelder wohldefiniert: Für $A \in \Xi(TM)$ erhält man ein Vektorfeld $\pi_*A \in \Xi(M)$. Um die vertikale Projektion ebenfalls auf ein Vektorfeld $A \in \Xi(TM)$ anwenden zu können, muss man dieses zunächst auf ein Element je Faser einschränken. Dies erreicht man durch Verknüpfung mit einem Vektorfeld $Z \in \Xi(M)$: $\varphi_*(A_Z) = \varphi_*(A \circ Z)$ definiert punktweise ein Vektorfeld auf M.*

1.1.2 Der horizontale und der vertikale Lift

Die vertikale Projektion φ_* ist die zu π_* komplementäre Art, $T_u(TM)$ auf T_pM abzubilden: Betrachtet man für $U \subset TM$ wieder die lokal mögliche Zerlegung $U \cong \tilde{U} \times V$, sowie eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow TM$, die einen Tangentialvektor in $T_u(TM)$ representiert, so projeziert $\pi \circ \gamma$ die Bewegung von γ in $\tilde{U}$ auf M und „ignoriert“ die Bewegung in V, während $\varphi \circ \gamma$ nur die Bewegung von γ in V, nicht aber die Bewegung in $\tilde{U}$ auf M projeziert.
Diese Überlegung führt zu folgendem Lemma:

Lemma 1.6. *Seien $X, Y \in \Xi(M)$. Es existiert ein eindeutig bestimmtes $A \in \Xi(TM)$ mit: $\pi_* A_u = X_{\pi(u)}$ und $\varphi_* A_u = Y_{\pi(u)}$ für alle $u \in TM$.*

Beweis. Wegen der Linearität von π_* und φ_* reicht es, zu zeigen, dass es zu $X, Y \in \Xi(M)$ eindeutig bestimmte Vektorfelder $A_1, A_2 \in \Xi(TM)$ gibt, mit:

$$\pi_*(A_1)_u = X_{\pi(u)} \qquad \varphi_*(A_1)_u = 0$$
$$\pi_*(A_2)_u = 0 \qquad \varphi_*(A_2)_u = X_{\pi(u)}.$$

Dies folgt daraus, dass π_*, eingeschränkt auf $\{B \in T_u(TM) | \varphi_* B = 0\}$, und φ_*, eingeschränkt auf $\{B \in T_u(TM) | \pi_* B = 0\}$, Diffeomorphismen sind. $\square$

Man kann die beiden Projektionen nutzen, um Vektorfelder auf M zu „rein horizontalen“ bzw. „rein vertikalen“ Vektorfeldern auf TM zu liften.

Definition 1.7. *Sei $X \in \Xi(M)$. Es existieren eindeutig bestimmte Vektorfelder $X^H, X^V \in \Xi(TM)$, so dass folgende Gleichungen gelten:*

$$\pi_*(X_u^H) = X_{\pi(u)} \qquad \varphi_*(X_u^H) = 0 \tag{1.1}$$
$$\pi_*(X_u^V) = 0 \qquad \varphi_*(X_u^V) = X_{\pi(u)} \tag{1.2}$$

für alle $u \in TM$, wobei $X_u^V := (X^V)_u$ und $X_u^H := (X^H)_u$. Wir nennen X^H den horizontalen und X^V den vertikalen Lift von X. Analog kann man für ein festes $u \in TM$ mit $\pi(u) = p$ den horizontalen bzw. vertikalen Lift für einen einzelnen Tangentialvektor $v \in T_pM$ zu Tangentialvektoren v_u^H und v_u^V in $T_u(TM)$ definieren.

Diese Definition des horizontalen Lifts stimmt mit der klassischen Definition (zum Beispiel nach Kobayashi und Nomizu [9]) überein, da $(\varphi_* X^H)_u = 0$ (für alle $u \in TM$) äquivalent zu der Bedingung ist, dass X^H horizontal bzgl. ∇^M sei.

Bemerkung 1.8. *Man kann jeden Tangentialvektor $A \in T_u(TM)$ in einen rein horizontalen Anteil und einen rein vertikalen Anteil zerlegen, also gilt: $T_u(TM) = ker((\varphi_*)_u) \oplus ker((\pi_*)_u)$. Damit kann man A schreiben als:*

$$A = (\pi_* A)^H + (\varphi_* A)^V.$$

Den vertikalen Lift kann man alternativ folgendermaßen definieren:

Lemma 1.9. *([3], S. 80) Sei $X \in \Xi(M)$ und $A \in \Xi(TM)$. Das Vektorfeld A ist genau dann gleich dem vertikalen Lift von X, wenn folgende zwei Bedingungen gelten:*

$$\pi_* A = 0 \tag{1.3}$$
$$A(df) = (Xf) \circ \pi \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M), \tag{1.4}$$

wobei df als Funktion von TM nach $\mathbb{R}$ aufgefasst wird.

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, dass für $A = X^V$ die Gleichungen (1.3) und (1.4) gelten:

Dass Gleichung (1.3) gilt ist Teil der Definition des vertikalen Lifts. Um (1.4) zu zeigen, wählen wir $u \in TM$. $U \subset M$ sei eine hinreichend kleine normale Umgebung um $\pi(u)$, so dass wir auf $\pi^{-1}(U)$ die Fasern des Tangentialbündels mit dem Tangentialraum des entsprechenden Punktes in M identifizieren können (vgl. Bemerkung 1.4). Demnach lässt sich u auch als $(p, v) \in M \times T_pM$ schreiben. Es ist also zu zeigen:

$$(d_v(d_pf))(X_u^V) = (d_pf)(X_p),$$

denn wegen $\pi_* X_u^V = 0$ kann man X_u^V als Element von $T_v(T_pM)$ auffassen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(d_pf)(X_p) &= (d_pf) \circ ((\exp_p \circ r_{-v})_*)(X_u^V) \\
&= (d_pf) \circ (d_v(\underbrace{\exp_p \circ r_{-v}}_{v \mapsto p}))(X_u^V) \\
&= d_v(f \circ \exp_p \circ r_{-v})(X_u^V).
\end{aligned}$$

Sei $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow T_pM, \quad t \mapsto v + t\xi$ Kurve in T_pM mit $\xi = j_v(X_u^V)$, wobei $j_v : T_v(T_pM) \longrightarrow T_pM$ die kanonische Identifikation ist. Damit ist $\alpha(0) = v$ und $\dot{\alpha}(0) = X_u^V \in T_v(T_pM)$. Mit Hilfe dieser Kurve können wir nun $d_v(f \circ \exp_p \circ r_{-v})(X_u^V)$ schreiben als:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \exp_p \circ r_{-v})(v + t\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \exp_p)(t\xi).$$

Nach der Definition der Exponentialfunktion ist jedoch $\exp_p(t\xi) = \gamma_\xi(t)$, wobei γ_ξ die auf einer hinreichend kleinen Umgebung um p eindeutig definierte Geodätische mit $\gamma_\xi(0) = p$ und $\dot{\gamma_\xi}(0) = \xi$ ist. Damit erhält man:

$$(d_pf)(X_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma_\xi)(t) = (d_pf)(\xi) = ((d_pf) \circ j_v)(X_u^V).$$

Da d_pf eine lineare Funktion ist und auf $\mathbb{R}$ abbildet, wo eine j entsprechende Identifikation gleich der Identität ist, gilt: $d_v(d_pf) = (d_pf) \circ j_v$, womit (1.4) gezeigt ist.

Da X^V zu $X \in \Xi(M)$ immer existiert (Lemma 1.6), müssen wir nun noch zeigen, dass X^V das einzige Vektorfeld auf TM ist, das (1.3) und (1.4) erfüllt. Nehmen wir nun also, es existieren $A, B \in \Xi(TM)$ mit $A_u \neq B_u$, für die (1.3) und (1.4) gelten. Dann folgt für alle $f \in C^\infty(M)$: $A(df) = (Xf) \circ \pi = B(df)$, wegen $\pi_* A = \pi_* B = 0$ (analog zu Teil 1) gilt also:

$$(d_v(d_p f))A_u = (d_v(d_p f))B_u.$$

Da $(d_v(d_p f))$ aber eine lineare Funktion ist, folgt: $(d_v(d_p f))(\overbrace{A_u - B_u}^{\neq 0}) = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Das ist ein Widerspruch und damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

1.1.3 Die Sasaki-Metrik

Mit Hilfe der eindeutigen Zerlegung eines Vektorfeldes auf TM in seinen horizontalen und seinen vertikalen Anteil, jeweils dargestellt als ein Vektorfeld auf M, kann man nun auf natürliche Weise eine Metrik auf TM einführen:

Definition 1.10. *Auf dem Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist die Sasaki-Metrik gegeben durch:*

$$\langle A, B\rangle_u := g_p(\pi_* A_u\ ,\ \pi_* B_u) + g_p(\varphi_* A_u\ ,\ \varphi_* B_u), \tag{1.5}$$

wobei $A, B \in \Xi(TM)$, $u \in TM$ und $p := \pi(u)$.

Bemerkung 1.11. *Insbesondere gilt für $X, Y \in \Xi(M)$:*

$$\begin{aligned} & \langle X^V, Y^H\rangle = \langle X^H, Y^V\rangle = 0 \\ \textit{und} \qquad & \langle X^V, Y^V\rangle = \langle X^H, Y^H\rangle = g(X, Y) \circ \pi. \end{aligned}$$

1.2 Die Lie-Klammern von gelifteten Vektorfeldern

Um den Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{TM} von $(TM, \langle\ ,\ \rangle)$ für vertikale bzw. horizontale Lifts von Vektorfeldern auf M zu bestimmen, ist es notwendig, die Lie-Klammern dieser Lifts mit Hilfe von lokalen Koordinaten zu berechnen.

1.2.1 Notation

In dieser Arbeit werden wir für Rechnungen in lokalen Koordinaten die folgende Notation verwenden:

Es sei $(x^1, ..., x^n)$ ein lokales Koordinatensystem auf $U \subset M$. Wir setzen $\overline{x}^i(p, v) := (x^i \circ \pi)(p, v) = x^i(p)$ und $a^i(p, v) := dx^i{}_p(v) = vx^i(p)$. Damit erhält man ein Koordinatensystem $(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n, a^1, ..., a^n)$ auf $\pi^{-1}(U) \subset TM$. Der Einfachheit halber schreiben wir zudem die Einheitsvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ als $X^1, ..., X^n$. Damit können wir ein Vektorfeld $X \in \Xi(M)$ lokal schreiben als: $X = \sum_{i=1}^n x_i X^i$. Zu beachten hierbei, dass mit x_i die Koeffizienten des Vektorfeldes X bezeichnet werden, während x^i für die i-te Koordinatenfunktion steht. Analog sei $\overline{X}^i := \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}$ und $A^i := \frac{\partial}{\partial a^i}$. Damit lässt sich ein Vektorfeld $A \in TM$ als:

$$A = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{X}^i + \sum_{i=1}^n a_i A^i$$

schreiben.

1.2.2 Die Projektionen lokal

Um mit Hilfe dieser Notation die vertikale Projektion φ_* in lokalen Koordinaten darstellen zu können, benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.12. *([3], S. 75) Es sei $q \in M$ und $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q. Dann gilt für zwei Vektorfelder $X, Y \in \Xi(U)$:*

$$\nabla_X^M Y = \varphi_*(Y_* X),$$

wobei wir Y als Abbildung von M nach TM auffassen und $(\varphi_*(Y_*X))_p$ als $\varphi_* \circ (Y_* X_p)$.

Beweis. Sei $p \in U$, $A \in T_u(TM)$ für ein $u \in \pi^{-1}(p)$ und γ eine Kurve in TM mit $\gamma(0) = u$ und $\dot{\gamma}(0) = A$. Dann repräsentiert die Kurve

$$\exp_p(\ \tau(\gamma) - \overbrace{\gamma(0)}^{=u}\ ) = \exp_p \circ\, r_{-u} \circ \tau_p \circ \gamma = \varphi \circ \gamma$$

den Vektor $\varphi_* A$. Daraus folgt, dass auch für die Kurve

$$\bar{\gamma}:\ t \longmapsto \exp_p \left(t \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\tau(\gamma(t)) - \gamma(0)}{t} \right)$$

gilt, dass $\bar{\gamma}(0) = p$ und $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \varphi_* A$ ist. Doch wegen $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(ct) = c$ gilt ebenfalls: $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{\tau(\gamma(t)) - \gamma(0)}{t} \right)$. Damit erhalten wir:

$$\varphi_* A = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\tau(\gamma(t)) - \gamma(0)}{t} \right). \tag{1.6}$$

Wählt man nun $A := (Y_* X)_p = Y_* X_p \in T_{Y_p}(TM)$ und γ als die Abbildung $t \mapsto Y \circ (\exp_p(t \cdot X_p))$, so erhält man eine Kurve mit $\gamma(0) = Y_p$ und $\dot{\gamma}(0) = A$.

Mit dieser Wahl von A und γ erhält man aus (1.6) schließlich die folgende Gleichung:

$$(\varphi_*(Y_*X))_p = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\tau(Y\circ(\exp_p(t\cdot X_p))) - Y_p}{t}\right).$$

Die rechte Seite ist aber gerade gleich $(\nabla^M_X Y)_p$ (vgl. [9], S. 29). $\square$

Damit können wir sowohl die horizontale als auch die vertikale Projektion in lokalen Koordinaten berechnen:

Lemma 1.13. *([3], S. 76) Es sei $q \in M$ und $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q. Ferner sei $Z \in \Xi(U)$ und A sei ein Vektorfeld auf $\pi^{-1}(U) \subset TM$, für das in den oben eingeführten lokalen Koordinaten gilt:*

$$A = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{X}^i + \sum_{i=1}^n a_i A^i.$$

Dann lässt sich die horizontale Projektion π_* und die vertikale Projektion φ_* der Abbildung A_Z schreiben als:

$$\pi_*(A_Z) = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i(Z)\cdot X^i \tag{1.7}$$

$$\varphi_*(A_Z) = \sum_{i=1}^n \left(a_i(Z) + \sum_{j,k}(\Gamma^i_{jk}\cdot\overline{x}_j(Z)\cdot a^k(Z))\right)\cdot X^i. \tag{1.8}$$

Beweis. Dass Gleichung (1.7) gilt, ist klar nach der Wahl des lokalen Koordinatensystems auf TM.

zu (1.8): Sei $p \in M$. Um die Gleichung in diesem Punkt p zu zeigen, wollen wir, um Lemma 1.12 anwenden zu können, zunächst den Tangentialvektor $(A_Z)_p = A_{Z_p} \in T(TM)$ durch $(Y_*X)_p$ für zwei Vektorfelder $X = \sum_{i=1}^n x_i X^i$ und $Y = \sum_{i=1}^n y_i Y^i \in \Xi(M)$ ausdrücken. Dies ist möglich, weil nach der Formel

$$Y_*X = \sum_i x_i\cdot\overline{X}^i_Y + \sum_{i,j}(x_j\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x^j})\cdot A^i_Y$$

die Vektoren $(Y_*X)_p$ für Vektorfelder $X, Y \in \Xi(M)$ mit $Y_p = Z_p$ eine Basis von $T(TM)$ erzeugen. Es folgt, dass $A_{Z_p} = (Y_*X)_p$ für

$$\begin{aligned} Z_p &= Y_p \\ \overline{x}_i\circ Z &= x_i \\ \text{und}\qquad a_i\circ Z &= \sum_j x_j\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x^j}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

wobei $A = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{X}^i + \sum_{i=1}^n a_i A^i$ und entsprechend

$$A_Z = \sum_{i=1}^n (\overline{x}_i \circ Z) \overline{X}^i_Z + \sum_{i=1}^n (a_i \circ Z) A^i_Z.$$

Nach Lemma 1.12 gilt: $\varphi_*((Y_* X)_p) = (\nabla^M_X Y)_p$, also erhält man, unter Berücksichtigung der lokalen Formel für die kovariante Ableitung (vgl. [9], S. 144),

$$\nabla^M_X Y = \sum_{i,j,k} x_j \cdot (\frac{\partial y_i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} \cdot \overbrace{y_k}^{a^k(Y)}) \cdot X^i,$$

schließlich die Gleichung:

$$\varphi_*((Y_* X)_p) = \sum_{i,j,k} x_j(p) \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x^j}(p) + \Gamma^i_{jk}(p) \cdot a^k(Y_p) \right) \cdot X^i_p. \tag{1.10}$$

Setzt man nun $(Y_* X)_p = A_{Z_p}$ und nutzt die Identitäten aus (1.9), so folgt aus (1.10):

$$\varphi_*(A_Z)_p = \sum_{i=1}^n \left(a_i(Z_p) + \sum_{j,k} (\Gamma^i_{jk}(p) \cdot \overline{x}_j(Z_p) \cdot a^k(Z_p)) \right) \cdot X^i_p$$

und damit wegen der Linearität von φ_* auch die Behauptung. □

1.2.3 Die Lifts lokal

Damit können wir auch den vertikalen bzw. horizontalen Lift der Einheitsvektorfelder $X^1, ..., X^n$ auf M in lokalen Koordinaten ausdrücken:

Lemma 1.14. *([3], S. 79) Es sei $q \in M$ und $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q. Dann gilt, eingeschränkt auf $\pi^{-1}(U)$:*

$$(X^j)^V = A^j \tag{1.11}$$

$$(X^j)^H = \overline{X}^j - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot a^k \right) \cdot A^i. \tag{1.12}$$

Beweis. zu (1.11): Es sei $(X^j)^V = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{X}^i + \sum_{i=1}^n a_i A^i$. Nach der Definition des vertikalen Lifts gilt für alle $u \in \pi^{-1}(U)$:

$$\pi_* \left(\sum_{i=1}^n \overline{x}_i(u) \overline{X}^i_u + \sum_{i=1}^n a_i(u) A^i_u \right) = 0$$

$$\varphi_* \left(\sum_{i=1}^n \overline{x}_i(u) \overline{X}^i_u + \sum_{i=1}^n a_i(u) A^i_u \right) = X^j_{\pi(u)}$$

und damit nach Lemma 1.13:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i(u) \cdot X^i_{\pi(u)} = 0 \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i(u) + \sum_{k,l} (\Gamma^i_{lk}(\pi(u)) \cdot \overline{x}_l(u) \cdot a^k(u)) \right) \cdot X^i_{\pi(u)} = X^j_{\pi(u)}. \tag{1.14}$$

Also ist nach (1.13) jedes der $\overline{x}_i \equiv 0$ und damit, nach (1.14), $a_i \equiv \delta_{ij}$.

zu (1.12): Für $(X^j)^H = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{X}^i + \sum_{i=1}^n a_i A^i$ gilt analog für alle Punkte $u \in \pi^{-1}(U)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i(u) \cdot X^i_{\pi(u)} = X^j_{\pi(u)} \tag{1.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i(u) + \sum_{k,l} (\Gamma^i_{lk}(\pi(u)) \cdot \overline{x}_l(u) \cdot a^k(u)) \right) \cdot X^i_{\pi(u)} = 0. \tag{1.16}$$

Also ist nach (1.15): $\overline{x}_i \equiv \delta_{ij}$, und dann folgt mit (1.16):

$$a_i(u) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(\pi(u)) \cdot a^k(u).$$

□

Bemerkung 1.15. *Am Beweis von Lemma 1.14 erkennt man leicht, dass für eine glatte Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:*

$$(f \cdot X^j)^V = (f \circ \pi) \cdot A^j$$

$$(f \cdot X^j)^H = (f \circ \pi) \cdot (\overline{X}^j - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot a^k \right) \cdot A^i),$$

die Lifts sind also C^∞-linear.

1.2.4 Die Lie-Klammern

Wir berechnen die benötigten Lie-Klammern zunächst für die Einheitsvektorfelder $X^1, ..., X^n$:

Lemma 1.16. *Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q. Ferner seien X^l, X^m zwei Einheitsvektorfelder auf U, $Z \in \Xi(U)$. Dann gilt:*

$$[(X^l)^V, (X^m)^V]_Z = 0 \tag{1.17}$$

$$[(X^l)^H, (X^m)^V]_Z = (\nabla^M_{X^l} X^m)^V_Z \tag{1.18}$$

$$[(X^l)^H, (X^m)^H]_Z = -(R^M(X^l, X^m)Z)^V_Z. \tag{1.19}$$

Beweis. Für die Lie-Klammern der lokalen Einheitsvektorfelder und für die Lie-Ableitung der Koordinatenfunktionen in Richtung dieser Einheitsvektorfelder auf dem Tangentialbündel gelten folgende Eigenschaften:

$$[\overline{X}^i, \overline{X}^j] = [A^i, A^j] = 0 \qquad [\overline{X}^i, A^j] = 0 \tag{1.20}$$
$$\overline{X}^i \overline{x}^j = A^i a^j = \delta_{ij} \qquad \overline{X}^i a^j = A^i \overline{x}^j = 0 \tag{1.21}$$

für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$.

zu (1.17): Nach Definition des vertikalen Lifts erhält man:

$$[(X^l)^V, (X^m)^V] = [A^l, A^m] = 0.$$

zu (1.18): Es gilt:

$$\begin{aligned}
[(X^l)^H, (X^m)^V] &= [\overline{X}^l - \sum_{i,k} (\Gamma^i_{lk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i \ , \ A^m] \\
&= [A^m \ , \ \sum_{i=1}^n (\Gamma^i_{lm} \circ \pi) \cdot a^m \cdot A^i] \\
&= \sum_{i=1}^n (\Gamma^i_{lm} \circ \pi) \cdot A^i.
\end{aligned}$$

Somit erhält man:

$$\pi_*[(X^l)^H, (X^m)^V]_Z = 0$$

$$\text{und} \quad \varphi_*[(X^l)^H, (X^m)^V]_Z = \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{lm} \cdot X^i = \nabla^M_{X^l} X^m.$$

zu (1.19): Es gilt:

$$\begin{aligned}
[(X^l)^H, (X^m)^H] &= [\overline{X}^l - \sum_{i,k} (\Gamma^i_{lk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i \ , \ \overline{X}^m - \sum_{i,k} (\Gamma^i_{mk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i] \\
&= [\sum_{i,k} (\Gamma^i_{lk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i \ , \ \sum_{i,k} (\Gamma^i_{mk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i] \\
&\quad + [\overline{X}^m \ , \ \sum_{i,k} (\Gamma^i_{lk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i] \\
&\quad - [\overline{X}^l \ , \ \sum_{i,k} (\Gamma^i_{mk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i].
\end{aligned}$$

Daraus erhält man, mit Hilfe von (1.20) und (1.21), nach einigen Umformungen schließlich (vgl. [9], S.145):

$$
\begin{aligned}
[(X^l)^H, (X^m)^H] = &\sum_{i,k} \Big(\overline{X}^m (\Gamma^i_{lk} \circ \pi) - \overline{X}^l (\Gamma^i_{mk} \circ \pi) \\
&+ \sum_j \Big((\Gamma^j_{lk} \circ \pi) \cdot (\Gamma^i_{mj} \circ \pi) \\
&- (\Gamma^j_{mk} \circ \pi) \cdot (\Gamma^i_{lj} \circ \pi) \Big) \Big) \cdot a^k \cdot A^i \\
= &\sum_{i,k} \Big((X^m(\Gamma^i_{lk}) - X^l(\Gamma^i_{mk}) \\
&+ \sum_j ((\Gamma^j_{lk}) \cdot (\Gamma^i_{mj}) - (\Gamma^j_{mk}) \cdot (\Gamma^i_{lj})) \circ \pi) \Big) \cdot a^k \cdot A^i \\
= &\sum_{i,k} (R^{M\,i}{}_{klm} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i.
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$
\begin{aligned}
&\pi_*[(X^l)^H, (X^m)^H]_Z = 0 \\
\text{und} \quad &\varphi_*[(X^l)^H, (X^m)^V]_Z = \sum_{i,k} R^{M\,i}{}_{kml} \cdot a^k(Z) \cdot X^i = -R^M(X^l, X^m)Z.
\end{aligned}
$$

□

Dieses Lemma lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 1.17. *([3], S. 78) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q und $X, Y, Z \in \Xi(U)$. Dann gilt:*

$$[X^V, Y^V]_Z = 0 \tag{1.22}$$
$$[X^H, Y^V]_Z = (\nabla^M_X Y)^V_Z \tag{1.23}$$
$$[X^H, Y^H]_Z = ([X,Y])^H_Z - (R^M(X,Y)Z)^V_Z. \tag{1.24}$$

Beweis. Wegen der $\mathbb{R}$-Linearität der Lie-Klammern und Lifts reicht es, die Behauptungen für $X = f \cdot X^l$ und $Y = g \cdot X^m$ zu zeigen, wobei $f, g \in C^\infty(M)$ sind.

zu (1.22): Es gilt nach Bemerkung 1.15:

$$[(f \cdot X^l)^V, (g \cdot X^m)^V] = [(f \circ \pi) \cdot A^l, (g \circ \pi) \cdot A^m],$$

und das ist wegen $A^l(g\circ\pi) = A^m(f\circ\pi) = 0$ und nach Lemma 1.16 gleich Null.

zu (1.23): Wiederum nach Bemerkung 1.15 und Lemma 1.16 gilt:

$$\begin{aligned}
[(f\cdot X^l)^{H}, (g\cdot X^m)^{V}] =& [\ (f\circ\pi)\cdot \overline{X}^l - (f\circ\pi)\cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\Gamma^i_{lk}\circ\pi)\cdot a^k\right)\cdot A^i, \\
&(g\circ\pi)\cdot A^m\ ] \\
=& \overline{X}^l(g\circ\pi)\cdot(f\circ\pi)\cdot(X^m)^{V} \\
&+ (g\circ\pi)\cdot(f\circ\pi)\cdot(\nabla^{M}_{X^l}X^m)^{V} \\
=& (\nabla^{M}_{fX^l}(gX^m))^{V}.
\end{aligned}$$

zu (1.24): Analog folgt hier nach einigen Rechnungen:

$$[(f\cdot X^l)^{H}, (g\cdot X^m)^{H}]_Z = ([fX^l, gX^m]_Z)^{H} - (R^{M}(fX^l, gX^m)Z)^{V}.$$

□

1.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Nun können wir mit Hilfe der Koszul-Formel (vgl. [9], S. 160)

$$\begin{aligned}
2\langle\ \nabla^{TM}_A B, C\ \rangle =& A\langle\ B\ , C\ \rangle + B\langle\ C\ , A\ \rangle - C\langle\ A\ , B\ \rangle \\
&+ \langle\ [A,B]\ , C\ \rangle + \langle\ [C,A]\ , B\ \rangle - \langle\ [B,C]\ , A\ \rangle
\end{aligned} \tag{1.25}$$

den Levi-Civita-Zusammenhang für alle Kombinationen von horizontal und vertikal gelifteten Vektorfeldern ausrechnen.

Satz 1.18. *([4], S. 125) Sei $q\in M$, $U\subset M$ eine kleine Umgebung von q, $X,Y\in\Xi(U)$, $u\in\pi^{-1}(U)$ und $p := \pi(u)$. Dann gilt:*

$$(\nabla^{TM}_{X^V}Y^{V})_u = 0 \tag{1.26}$$

$$(\nabla^{TM}_{X^H}Y^{V})_u = (\nabla^{M}_X Y)^{V}_u + \frac{1}{2}(R^{M}_p(u,Y)X)^{H}_u \tag{1.27}$$

$$(\nabla^{TM}_{X^V}Y^{H})_u = \frac{1}{2}(R^{M}_p(u,X)Y)^{H}_u \tag{1.28}$$

$$(\nabla^{TM}_{X^H}Y^{H})_u = (\nabla^{M}_X Y)^{H}_u - \frac{1}{2}(R^{M}_p(X,Y)u)^{V}_u. \tag{1.29}$$

Beweis. Entsprechend den Gleichungen in (1.21) gelten folgende Eigenschaften für eine glatte Funktion $f: \pi^{-1}(U) \subset TM \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf den Fasern von TM konstant ist:

$$(X^{H} f) \circ \pi = (X(f \circ \pi)) \tag{1.30}$$

und

$$X^{V} f = 0. \tag{1.31}$$

zu (1.26): Es gilt nach der Koszul-Formel (1.25):

$$2\langle \nabla^{TM}_{X^V} Y^{V}, Z^{V} \rangle = X^{V} \langle Y^{V}, Z^{V} \rangle + Y^{V} \langle Z^{V}, X^{V} \rangle - Z^{V} \langle X^{V}, Y^{V} \rangle,$$

und das ist nach (1.31) gleich Null, da $\langle X^{V}, Y^{V} \rangle = g(X,Y) \circ \pi$ auf den Fasern von TM konstant ist. Entsprechend gilt nach Satz 1.17 und (1.30):

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla^{TM}_{X^V} Y^{V}, Z^{H} \rangle &= -Zg(X,Y) + g(\nabla^{M}_{Z} X, Y) + g(\nabla^{M}_{Z} Y, X) \\ &= (\nabla^{M}_{Z} g)(X,Y) = 0. \end{aligned}$$

Analog folgen *(1.27) - (1.29)* aus der Koszul-Formel.

□

1.4 Die Krümmung

1.4.1 Die Riemannsche Krümmung

Anders als in [4] wollen wir den Riemannschen Krümmungstensor mit Hilfe der O'Neill-Formeln aus [8] beweisen. Doch auch bei diesem Beweis benötigt man das folgende Lemma aus [4]:

Lemma 1.19. *([4], S. 125) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q, $X \in \Xi(U)$, $u \in \pi^{-1}(U)$ und $p := \pi(u)$. Ferner sei F ein C^∞-linearer, fasertreuer Endomorphismus auf $\pi^{-1}(U)$, das heißt, es gelte: $\pi \circ F = \pi$ und Z^u sei ein Vektorfeld auf U mit den Eigenschaften:*

$$Z^u_p = u \qquad \text{und} \qquad (\nabla^{M}_{Y} Z^u)_p = 0, \quad \text{für alle } Y \in \Xi(U).$$

Dann gilt:

$$(\nabla^{TM}_{X^V} F^{V})_u = (F(X_p))^{V}_u \tag{1.32}$$

$$(\nabla^{TM}_{X^V} F^{H})_u = (F(X_p))^{H}_u + \frac{1}{2}\Big(R^{M}_p(u,X) \circ F(X)\Big)^{H}_u \tag{1.33}$$

$$(\nabla^{TM}_{X^H} F^{V})_u = (\nabla^{TM}_{X^H} (F \circ Z^u)^{V})_u \tag{1.34}$$

$$(\nabla^{TM}_{X^H} F^{H})_u = (\nabla^{TM}_{X^H} (F \circ Z^u)^{H})_u, \tag{1.35}$$

wobei $F^{V}_u := (F(u))^{V}_u$ und $F^{H}_u := (F(u))^{H}_u$.

Beweis. Man kann in lokalen Koordinaten (unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.4) $u \in \pi^{-1}(p) \cong T_pM$ schreiben als:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a^i(u) X_p^i,$$

und wegen der Linearität des vertikalen Lifts und des Endomorphismus F gilt:

$$\begin{aligned}
F_u^V &= (F(u))_u^V = (F\left(\sum_{i=1}^{n} a^i(u) X_p^i\right))_u^V \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(u) \cdot (F(X_p^i))_u^V .
\end{aligned}$$

Damit ist also:

$$F^V = \sum_{i=1}^{n} a^i \cdot (F \circ X^i \circ \pi)^V$$

und analog:

$$F^H = \sum_{i=1}^{n} a^i \cdot (F \circ X^i \circ \pi)^H .$$

zu (1.32): Nach Lemma 1.9 gilt: $X^V(dx^i) = (Xx^i) \circ \pi = dx^i(X) \circ \pi$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{TM}_{X^V} F^V)_u &= (\nabla^{TM}_{X^V} \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \cdot (F \circ X^i \circ \pi)\right)^V)_u \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(X^V(dx^i) \cdot (F \circ X^i \circ \pi)^V\right)_u \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left(dx^i \cdot \underbrace{\nabla^{TM}_{X^V} (F \circ X^i \circ \pi)^V}_{=0}\right)_u \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((dx^i(X) \circ \pi) \cdot (F \circ X^i \circ \pi)^V\right)_u \\
&= (F\left(\sum_{i=1}^{n} a^i(X_p) \cdot X_p^i\right))_u^V = F(X_p)_u^V .
\end{aligned}$$

zu (1.33): Es gilt, analog zum Beweis von (1.32):

$$\begin{aligned}(\nabla^{M}_{X^V} F^{H})_u = &\sum_{i=1}^{n} \left(X^{V}(dx^i) \cdot (F \circ X^i \circ \pi)^{H} \right)_u \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left(dx^i \cdot \underbrace{\nabla^{TM}_{X^V}(F \circ X^i \circ \pi)^{H}}_{=0} \right)_u \\ = F(X_p)^{V}_u &+ \sum_{i=1}^{n} a^i(u) \cdot \frac{1}{2} \left(R^{M}_p(u, X_p) \circ F(X^i_p) \right)^{H}_u .\end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Krümmungstensors und von F und wegen

$$\sum_{i=1}^{n} a^i(u) X^i_p = u$$

folgt die Behauptung.

zu (1.34): Es sei α eine beliebige Kurve in M, mit: $\alpha(0) = p$ und mit $\dot{\alpha}(0) = X_p$. Ferner sei $\beta_1 : Z^u \circ \alpha$ und β_2 sei der horizontale Lift von α nach TM mit $\beta_2(0) = u$. Dann ist $\beta_1(0) = \beta_2(0) = u$ und $\dot{\beta}_1(0) = \dot{\beta}_2(0) = X^{H}_p$. [Die Gleichung $\dot{\beta}_1(0) = X^{H}_p$ gilt wegen:

$$\pi_*(\frac{d}{dt}|_{t=0}(Z^u \circ \alpha))(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\pi \circ Z^u \circ \alpha)(0) = \dot{\alpha}(0) = X_p$$

und $\varphi_*(\frac{d}{dt}|_{t=0}(Z^u \circ \alpha))(0) = 0$.] Damit erhält man:

$$\begin{aligned}(\nabla^{TM}_{X^H} F^{V})_u &= \left.\frac{\nabla^{TM}}{dt}\right|_{t=0} ((F \circ \beta_1)(t))^{V}_{\beta_1(t)} \\ &= \left.\frac{\nabla^{TM}}{dt}\right|_{t=0} ((F \circ Z^u \circ \overbrace{\pi \circ \beta_2}^{=\alpha})(t))^{V}_{\beta_2(t)} \\ &= \left(\nabla^{TM}_{X^H}(F \circ Z^u \circ \pi)^{V} \right)_u .\end{aligned}$$

Aber das ist, wenn man $F \circ Z^u$ als Vektorfeld auf U betrachtet, gerade gleich $\left(\nabla^{TM}_{X^H}(F \circ Z^u)^{V} \right)_u$.

Analog kann man *(1.32)* zeigen.

□

Damit ist es möglich, den Krümmungstensor des Tangentialbündels wiederum für alle Kombinationen von horizontalen und vertikalen Vektorfeldern zu bestimmen:

Satz 1.20. *([4], S. 126) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q, $X, Y, Z \in \Xi(U)$, $u \in \pi^{-1}(U)$ und $p := \pi(u)$. Dann gilt:*

$$R_u^{TM}(X^V, Y^V)Z^V = 0 \tag{1.36}$$

$$R_u^{TM}(X^V, Y^H)Z^V = \left(\frac{1}{2}R_p^M(X,Z)Y + \frac{1}{4}R_p^M(u,X)R_p^M(u,Z)Y\right)_u^H \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^H, Y^H)Z^V = &\left(R_p^M(X,Y)Z + \frac{1}{4}R_p^M(R_p^M(u,Z)Y \ , X)u \right.\\ &\left. -\frac{1}{4}R_p^M(R_p^M(u,Z)X \ , Y)u\right)_u^V \\ &+\frac{1}{2}\left((\nabla_X^M R^M)(u,Z)Y - (\nabla_Y^M R^M)(u,Z)X\right)_u^H \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^V, Y^V)Z^H = &\left(R_p^M(X,Y)Z + \frac{1}{4}R_p^M(u,X)R_p^M(u,Y)Z \right.\\ &\left. -\frac{1}{4}R_p^M(u,Y)R_p^M(u,X)Z\right)_u^H \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^H, Y^V)Z^H = &\left(\frac{1}{2}R_p^M(X,Z)Y + \frac{1}{4}R_p^M(R_p^M(u,Y)Z \ , X)u\right)_u^V \\ &+\frac{1}{2}\left((\nabla_X^M R^M)(u,Y)Z\right)_u^H \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^H, Y^H)Z^H = &\left(R_p^M(X,Y)Z + \frac{1}{4}R_p^M(u, \ R_p^M(Z,Y)u)X \right.\\ &+\frac{1}{4}R_p^M(u, \ R_p^M(X,Z)u)Y \\ &\left. +\frac{1}{2}R_p^M(u, \ R_p^M(X,Y)u)Z\right)_u^H \\ &+\frac{1}{2}\left((\nabla_Z^M R^M)(X,Y),u\right)_u^V . \end{aligned} \tag{1.41}$$

Beweis. Mit Hilfe der O'Neill-Formeln ([8], S. 241)[2] können wir die Krümmung des Tangentialbündels berechnen, indem wir die Projektion π als Riemannsche Submersion auffassen. Dafür werden zwei $(1,2)$-Tensoren T und A

[2]Wegen der anderen Vorzeichenkonvention in diesem Buch müssen in den Formeln jeweils die Vorzeichen der Krümmungtensoren geändert werden.

verwendet. Diese lauten in unserem Fall:

$$
\begin{aligned}
(T_{X^H} Y^V)_u &= 0 \\
(T_{X^H} Y^H)_u &= 0 \\
(T_{X^V} Y^V)_u &= (\pi_*(\nabla^{TM}_{X^V} Y^V))^H_u = 0 \\
(T_{X^V} Y^H)_u &= (\varphi_*(\nabla^{TM}_{X^V} Y^H))^V_u = 0
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(A_{X^V} Y^V)_u &= 0 \\
(A_{X^V} Y^H)_u &= 0 \\
(A_{X^H} Y^V)_u &= (\pi_*(\nabla^{TM}_{X^H} Y^V)_u)^H = \frac{1}{2}(R^M(u,Y)X)^H_u \\
(A_{X^H} Y^H)_u &= (\varphi_*(\nabla^{TM}_{X^H} Y^H)_u)^V = -\frac{1}{2}(R^M(X,Y)u)^V_u .
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

Ferner wird bei Besse mit $\hat{R}$ die Krümmung der Fasern der Riemannschen Submersion bezeichnet, während $\hat{R}$ die Krümmung der Basismannigfaltigkeit beschreibt. In unserem Fall gilt:

$$
\check{R}_u(X^H, Y^H, Z^H, \xi^H) = R^M_p(X, Y, Z, \xi) \tag{1.44}
$$

$$
\hat{R} = 0. \tag{1.45}
$$

Wegen der Symmetrien des Krümmungstensors genügt es, folgende Gleichungen zu zeigen:

$$
R^{TM}_u(X^V, Y^V, Z^V, \xi^V) = 0 \tag{1.46}
$$

$$
R^{TM}_u(X^V, Y^V, Z^V, \xi^H) = 0 \tag{1.47}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{TM}_u(X^H, Y^V, Z^H, \xi^V) = {}& \frac{1}{2} R^M_p(X, Z, Y, \xi) \\
&+ \frac{1}{4} R^M_p \Big(R^M_p(u,Y)Z \ , X, u, \xi \Big)
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{TM}_u(X^V, Y^V, Z^H, \xi^H) = {}& R^M_p(X, Y, Z, \xi) \\
&+ \frac{1}{4} R^M_p \Big(u, X, \ R^M_p(u,Y)Z \ , \xi \Big) \\
&- \frac{1}{4} R^M_p \Big(u, Y, \ R^M_p(u,X)Z \ , \xi \Big)
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

$$R_u^{TM}(X^H, Y^H, Z^H, \xi^V) = \frac{1}{2}(\nabla_Z^M R^M)_p(X, Y, u, \xi) \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^H, Y^H, Z^H, \xi^H) = {} & R_p^M(X, Y, Z, \xi) \\ & + \frac{1}{4} R_p^M\Big(u,\ R_p^M(Z, Y)u\ , X, \xi\Big) \\ & + \frac{1}{4} R_p^M\Big(u,\ R_p^M(X, Z)u\ , Y, \xi\Big) \\ & + \frac{1}{2} R_p^M\Big(u,\ R_p^M(X, Y)u\ , Z, \xi\Big). \end{aligned} \tag{1.51}$$

zu (1.46): Nach den O'Neill-Formeln gilt:

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^V, Y^V, Z^V, \xi^V) = {} & \hat{R}_p^{TM}(X^V, Y^V, Z^V, \xi^V) \\ & + \langle T_{X^V} Z^V\ ,\ T_{Y^V} \xi^V \rangle_u - \langle T_{Y^V} Z^V\ ,\ T_{X^V} \xi^V \rangle_u \end{aligned}$$

und das ist nach (1.42) und (1.45) gleich Null.

zu (1.47): Nach den O'Neill-Formeln gilt:

$$R_u^{TM}(X^V, Y^V, Z^V, \xi^H) = -\langle (\nabla_{Y^V}^{TM} T)_{X^V} Z^V\ ,\ \xi^H \rangle_u + \langle (\nabla_{X^V}^{TM} T)_{Y^V} Z^V\ ,\ \xi^H \rangle_u$$

und auch dieser Term verschwindet nach (1.42).

zu (1.48): Nach den O'Neill-Formeln gilt:

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^H, Y^V, Z^H, \xi^V) = {} & -\langle (\nabla_{X^H}^{TM} T)_{Y^V} \xi^V\ ,\ Z^H \rangle_u + \langle T_{Y^V} X^H\ ,\ T_{\xi^V} Z^H \rangle_u \\ & - \langle (\nabla_{Y^V}^{TM} A)_{X^H} Z^H\ ,\ \xi^V \rangle_u - \langle A_{X^H} Y^V\ ,\ A_{Z^H} \xi^V \rangle_u, \end{aligned}$$

also ist nach (1.42) und (1.43):

$$\begin{aligned} R_u^{TM}(X^H, Y^V, Z^H, \xi^V) = {} & \langle\ -\nabla_{Y^V}^{TM}(A_{X^H} Z^H) + A_{(\nabla_{Y^V}^{TM} X^H)} Z^H \\ & + A_{X^H}(\nabla_{Y^V}^{TM} Z^H)\ ,\ \xi^V\ \rangle_u \\ & - \frac{1}{4}\ g\Big(R_p^M(u, Y)X\ ,\ R_p^M(u, \xi, Z)\Big). \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.19 gilt:

$$\nabla_{Y^V}^{TM}(A_{Z^H} \xi^H) = -\frac{1}{2}\ \nabla_{Y^V}^{TM}\Big(R_p^M(X, Z)u\Big)^V = -\frac{1}{2}\ R_p^M(X, Z)Y,$$

deshalb erhält man:

$$\begin{aligned}
R_u^{TM}(X^H, Y^V, Z^H, \xi^V) &= \frac{1}{2} R_p^M(X, Z, Y, \xi) - \frac{1}{4} R_p^M\left(R_p^M(u, Y)X\ , Z, u, \xi\right) \\
&\quad - \frac{1}{4} R_p^M\left(X,\ R_p^M(u, Y)Z\ , u, \xi\right) \\
&\quad - \frac{1}{4} R_p^M\left(u, \xi, Z,\ R_p^M(u, Y)X\right) \\
&= \frac{1}{2} R_p^M(X, Z, Y, \xi) + \frac{1}{4} R_p^M\left(R_p^M(u, Y)Z\ , X, u, \xi\right).
\end{aligned}$$

Die Aussagen *(1.49) - (1.51)* folgen analog aus:

$$\begin{aligned}
R_u^{TM}(X^V, Y^V, Z^H, \xi^H) = &- \langle (\nabla^{TM}_{X^V} A)_{Z^H} \xi^H\ ,\ Y^V \rangle_u + \langle (\nabla^{TM}_{Y^V} A)_{Z^H} \xi^H\ ,\ X^V \rangle_u \\
&- \langle A_{Z^H} X^V\ ,\ A_{\xi^H} Y^V \rangle_u + \langle A_{Z^H} Y^V\ ,\ A_{\xi^H} X^V \rangle_u \\
&+ \langle T_{X^V} Z^H\ ,\ T_{Y^V} \xi^H \rangle_u - \langle T_{Y^V} Z^H\ ,\ T_{X^V} \xi^H \rangle_u \\
R_u^{TM}(X^H, Y^H, Z^H, \xi^V) = &- \langle (\nabla^{TM}_{Z^H} A)_{X^H} Y^H\ ,\ \xi^V \rangle_u - \langle A_{X^H} Y^H\ ,\ T_{\xi^V} Z^H \rangle_u \\
&+ \langle A_{Y^H} Z^H\ ,\ T_{\xi^V} X^H \rangle_u + \langle A_{Z^H} X^H\ ,\ T_{\xi^V} Y^H \rangle_u \\
R_u^{TM}(X^H, Y^H, Z^H, \xi^H) = &\check{R}_u(X^H, Y^H, Z^H, \xi^H) + 2\langle A_{X^H} Y^H\ ,\ A_{Z^H} \xi^H \rangle_u \\
&- \langle A_{Y^H} Z^H\ ,\ A_{X^H} \xi^H \rangle_u + \langle A_{X^H} Z^H\ ,\ A_{Y^H} \xi^H \rangle_u .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.21. *Aufgrund der eindeutigen Zerlegbarkeit von Vektoren aus $T_u(TM)$ in horizontal und vertikal gelifteten Anteil ist R^{TM} wegen der Tensoreigenschaft durch die Formeln in Satz 1.20 vollständig bestimmt.*

1.4.2 Die Skalarkrümmung

Mit dem Riemannschen Krümmungstensor kann man leicht die Ricci-Krümmung des Tangentialbündels bestimmen:

Satz 1.22. *Sei $q \in M$ und $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q, $X^1, ..., X^n$ seien die Einheitsvektorfelder auf U, $Y \in \Xi(U)$, $u \in \pi^{-1}(U)$ und $p := \pi(u)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Ric}_u^{TM}(Y^V, Y^V) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} R_p^M\left(Y, u,\ R_p^M(u, Y)X^i\ , X^i\right) \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_u^{TM}(Y^H, Y^H) = \mathrm{Ric}_p^M(Y, Y) &+ \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n} R_p^M\left(u,\ R_p^M(X^i, Y)u\ , Y, X^i\right) \\
&- \frac{1}{4} R_p^M\left(R_p^M(u, X^i)Y\ , Y, u, X^i\right).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 1.20. □

Die folgenden beiden Sätze (nicht aber die Beweise) stammen aus [7].

Satz 1.23. *([7], S. 5) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q und $p \in U$. Ferner seien $X^1, ..., X^n$ die Einheitsvektorfelder auf U und*

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k X_p^k \in \pi^{-1}(p) \subset TM.$$

Dann ist die Skalarkrümmung von $(TM, \langle\ ,\ \rangle)$ gegeben durch:

$$\mathrm{scal}_u^{TM} = \mathrm{scal}_p^{M} - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l,m} R_{ijkm}^{M}(p) \cdot R_{ijlm}^{M}(p) \cdot u_k \cdot u_l. \tag{1.54}$$

Beweis. Es gilt nach Satz 1.22:

$$\begin{aligned}
\mathrm{scal}_u^{TM} &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_u^{TM}((X^j)^V, (X^j)^V) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_u^{TM}((X^j)^H, (X^j)^H) \\
&= \mathrm{scal}_p^{M} - \frac{3}{4} \sum_{i,j} g\left(R_p^{M}(X^i, X^j)u\ ,\ R_p^{M}(X^i, X^j)u\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j} g\left(R_p^{M}(X^j, u)X^i\ ,\ R_p^{M}(X^j, u)X^i\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j} g\left(R_p^{M}(X^i, u)X^j\ ,\ R_p^{M}(X^i, u)X^j\right).
\end{aligned}$$

Verwendet man nun $u = \sum_{k=1}^{n} u_k X_p^k$, so vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\mathrm{scal}_u^{TM} = \mathrm{scal}_p^{M} - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} g\left(R_p^{M}(X^i, X^j)X^k\ ,\ R_p^{M}(X^i, X^j)X^l\right) \cdot u_k \cdot u_l.$$

Setzt man schließlich

$$R_p^{M}(X^i, X^j)X^l = \sum_{m=1}^{n} g(R_p^{M}(X^i, X^j)X^l, X^m) \cdot X^m = \sum_{m=1}^{n} R_{ijlm}^{M} \cdot X^m,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathrm{scal}_u^{TM} &= \mathrm{scal}_p^{M} - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l,m} R_{ijlm}^{M} \cdot g\left(R_p^{M}(X^i, X^j)X^k\ ,\ X^m\right) \cdot u_k \cdot u_l \\
&= \mathrm{scal}_p^{M} - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l,m} R_{ijlm}^{M} \cdot R_{ijkm}^{M} \cdot u_k \cdot u_l.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.24. *([7], S. 5) Das Tangentialbündel* $(TM, \langle\ ,\ \rangle)$ *einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g)*, versehen mit der Sasaki-Metrik, hat nur dann eine konstante Skalarkrümmung, wenn* (M, g) *flach ist. Insbesondere ist das Tangentialbündel einer nicht flachen Mannigfaltigkeit mit der Sasaki-Metrik niemals Einstein oder lokal symmetrisch.*

Beweis. Es sei $\mathrm{scal}^{TM} \equiv c$. Dann gilt nach Satz 1.23:

$$\mathrm{scal}_p^{M} - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l,m} \overset{M}{R}_{ijkm}(p) \cdot \overset{M}{R}_{ijlm}(p) \cdot u_k \cdot u_l = c, \qquad \text{für alle } u_k, u_l \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt $\mathrm{scal}^{M} \equiv c$ und:

$$\sum_{i,j,k,l,m} \overset{M}{R}_{ijkm}(p) \cdot \overset{M}{R}_{ijlm}(p) \cdot u_k \cdot u_l = 0, \qquad \text{für alle } u_k, u_l \in \mathbb{R}.$$

Also gilt insbesondere für alle $u_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j,k,m} (\overset{M}{R}_{ijkm}(p))^2 \cdot u_k = 0$$

und es folgt: $\overset{M}{R}_{ijkm} \equiv 0$. $\square$

Kapitel 2

Das Sphärenbündel

Das Sphärenbündel über einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist definiert als $SM := \{u \in TM \mid g_{\pi(u)}(u, u) = 1\}$ und ist damit eine $(2n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des Tangentialbündels. Zusammen mit der Sasaki-Metrik, eingeschränkt auf SM (hier ebenfalls mit $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichnet), erhält man wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

2.1 Der tangentiale Lift

Wie schon beim Tangentialbündel ist es möglich, für ein $u \in SM$ die Vektoren aus $T_u(SM)$ in einen horizontalen und einen vertikalen Anteil zu zerlegen, um diese durch geliftete Vektoren aus T_pM darzustellen. Wiederum soll der Krümmungstensor für geliftete Vektorfelder berechnet werden.

Da die horizontalen Vektorfelder auf SM genau den horizontalen Vektorfeldern auf TM (eigeschränkt auf SM) entsprechen, können wir die Definition des horizontalen Liftes für das Sphärenbündel unverändert übernehmen. Bei den vertikalen Vektorfeldern stehen wir allerdings vor einem Problem: Für $u \in SM$ und $A \in T_u(SM)$ existiert zwar immer ein $v \in T_{\pi(u)}M$, mit $v_u^{V} = A$, aber im Allgemeinen kein Vektorfeld $X \in \Xi(M)$, so dass $X^{V}|_{SM} \in \Xi(SM)$ und $(X^{V})_u = A$. Auch für lokal definierte Vektorfelder bleibt dieses Problem bestehen. Deshalb ist es nötig, einen vertikalen Lift einzuführen, der Vektoren aus $T_{\pi(u)}M$ immer in Vektoren aus $T_u(SM)$ überführt. Diese Abbildung heißt tangentialer Lift.

Definition 2.1. *Es sei $q \in M$ und $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q, ferner sei $u \in \pi^{-1}(U) \subset SM$ und $v \in T_{\pi(u)}M$. Dann ist der tangentiale Lift von v definiert als das vertikale Vektorfeld:*

$$v_u^{T} := v_u^{V} - g(u, v)N_u,$$

wobei das Normalenvektorfeld $N \in \Xi(\pi^{-1}(U))$ punktweise gegeben ist durch

$$N_u := \sum_{i=1}^{n} a^i(u) A^i.$$

Für $X \in \Xi(U)$ ist auf $\pi^{-1}(U)$ das Vektorfeld X^T definiert durch:

$$X_u^T := (X^T)_u = (X_{\pi(u)})_u^T, \quad \textit{für alle } u \in SM.$$

Bemerkung 2.2. *Für das Normalenvektorfeld N gelten folgende Eigenschaften:*

$$(\pi_* N)_Z = 0 \qquad \textit{und} \qquad (\varphi_* N)_Z = \sum_{i=1}^{n} a^i(Z) X^i = Z,$$

für alle lokalen Vektorfelder Z auf M. Damit lässt sich für ein $p \in M$ der tangentiale Lift eines einzelnen Tangentialvektors $v \in T_pM$ als vertikaler Lift schreiben, wobei wir $u \in \pi^{-1}(p)$ entsprechend Bemerkung 1.4 auch als Element von T_pM auffassen:

$$v_u^T = v^V + g(u, v) u_u^V.$$

2.2 Die Lie-Klammern

Um den Levi-Civita-Zusammenhang und die Krümmung des Sphärenbündels zu bestimmen, benötigen wir noch einige Lie-Klammern.

Lemma 2.3. *([5], S. 431) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q und $X, Y, Z \in \Xi(U)$. Dann gilt:*

$$[X^V, N]_Z = X_Z^V \tag{2.1}$$

$$[X^H, N]_Z = 0 \tag{2.2}$$

$$[X^T, Y^T]_Z = g(X, Z) Y_Z^T - g(Y, Z) X_Z^T \tag{2.3}$$

$$[X^H, Y^T]_Z = (\nabla_X^M Y)_Z^T \tag{2.4}$$

$$[X^H, Y^H]_Z = ([X, Y])_Z^H - (R^M(X, Y) Z)_Z^V. \tag{2.5}$$

Beweis. zu (2.1): Für $X \in \{X^1, ..., X^n\}$ ist die Behauptung richtig, denn es gilt:

$$[(X^j)^V, N] = \sum_{i=1}^{n} A^j(a^i) A^i = A^j = (X^j)^V,$$

und wegen $N(f \circ \pi) = 0$ folgt für eine glatte Funktion $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$[(fX^j)^{V}, N] = (fX^j)^{V}.$$

Damit ist (2.1) gezeigt.

zu (2.2): Wie bei (2.1) reicht es, den Beweis für ein Einheitsvektorfeld zu führen. Hier gilt:

$$\begin{aligned}
[(X^j)^{V}, N] =& [\overline{X}^j - \sum_{i,k} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot a^k \cdot A^i \ , \ \sum_{i=1}^{n} a^i A^i] \\
=& \sum_{i,\bar{i},k} \ a^{\bar{i}} \cdot (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot A^{\bar{i}}(a^k) \cdot A^i \\
& - \sum_{i,\bar{i},k} \ a^k \cdot (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot A^i(a^{\bar{i}}) \cdot A^{\bar{i}} \\
=& \sum_{i,k} \ a^k \cdot (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot A^i - \sum_{i,k} \ a^k \cdot (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \cdot A^i = 0.
\end{aligned}$$

zu (2.3): Es gilt:

$$\begin{aligned}
[X^{T}, Y^{T}] &= [X^{V} - \langle X^{V}, N \rangle N \ , \ Y^{V} - \langle Y^{V}, N \rangle N] \\
&= \langle X^{V}, N \rangle [Y^{V}, N] - \langle X^{V}, N \rangle [X^{V}, N]
\end{aligned}$$

und daraus folgt, mit Hilfe von Bemerkung 2.2 und (2.1) die Behauptung.

Analog folgt Behauptung *(2.4)*. Behauptung *(2.5)* folgt direkt aus Satz 1.17. $\square$

2.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Lemma 2.4. *Es sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung des Punktes q, $u \in \pi^{-1}(U) \subset TM$ und $X \in \Xi(U)$. Ferner sei $f \ : \ TM \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, $C^\infty(M)$-lineare Funktion auf dem Tangentialbündel. Dann gilt:*

$$(X^{V} f)(u) = f(X_{\pi(u)}).$$

Beweis. Wie beim Beweis zu Lemma 1.19 schreiben wir $u = \sum_{i=1}^n a^i(u) X^i$ und erhalten wegen der Linearität von f:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{a^i(u)}^{=dx^i(u)} \cdot f(X^i_{\pi(u)}) = \sum_{i=1}^{n} a^i(u) \cdot (f \circ X^i \circ \pi)(u).$$

Damit gilt wegen $X^V(f \circ X^i \circ \pi) = 0$:

$$(X^V f)(u) = \sum_{i=1}^{n} (X^V(dx^i))(u) \cdot (f \circ X^i \circ \pi)(u).$$

Jetzt können wir ganz analog zum Beweis von Lemma 1.19 wieder Lemma 1.9 anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} (X^V f)(u) &= \sum_{i=1}^{n} (dx^i(X) \circ \pi)(u) \cdot (f \circ X^i \circ \pi)(u) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a^i(X_{\pi(u)}) \cdot X^i_{\pi(u)}\right) = f(X_{\pi(u)}). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5. *Es sei A ein vertikales und B ein horizontales lokales Vektorfeld auf TM. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\nabla^{TM}_A N = A \\ \textit{und} \qquad &\nabla^{TM}_B N = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Wegen der Linearität der kovarianten Ableitung reicht es, die beiden Gleichungen für ein geliftetes lokales Vektorfeld auf M, hier mit X bezeichnet, zu zeigen:

$$\nabla^{TM}_{X^V} N = X^V \tag{2.6}$$

$$\nabla^{TM}_{X^H} N = 0. \tag{2.7}$$

zu (2.6): Nach der Koszul-Formel (1.25) und nach Bemerkung 2.2 gilt für ein lokales Vektorfeld Z auf M:

$$\langle \nabla^{TM}_{X^V} N\ ,\ Z^V \rangle = \frac{1}{2}\Big(X^V(g(u,Z)) + N(g(X,Z)) - Z^V(g(u,X)) + 2g(X,Z)\Big).$$

Eingeschränkt auf eine Faser, erfüllen die Funktionen $u \mapsto g(u,X)$ bzw. $u \mapsto g(u,Z)$ alle Voraussetzungen von Lemma 2.4, und so gilt:

$$X^V(g(u,Z)) = Z^V(g(u,X)) = g(X,Z).$$

Außerdem ist $N(g(X,Z)) = 0$ und damit folgt:

$$\langle \nabla^{TM}_{X^V} N\ ,\ Z^V \rangle = g(X,Z) = \langle X^V, Z^V \rangle.$$

Analog gilt nun:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^{TM}_{X^V} N \ , \ Z^H \rangle &= \frac{1}{2}\Big(-Z^H(g(X,u)) + g(\nabla^M_Z X, u)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(-Z(g(X,u)) + g(\nabla^M_Z X, u)\Big)\end{aligned}$$

und das ist gleich Null, da für ein festes $u \in TM$ die Abbildung $g(\,\cdot\,, u)$ parallel bezüglich ∇^M ist.

Genauso folgt Behauptung *(2.7)*.

$\square$

Bemerkung 2.6. *Da auch N ein vertikales Vektorfeld ist, gilt insbesondere:*

$$\nabla^{TM}_N N = N.$$

Satz 2.7. *([5], S. 231) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q, $X, Y \in \Xi(U)$, $u \in \pi^{-1}(U) \subset SM$ und $p := \pi(u)$. Für den Levi-Civita-Zusammenhang von $(SM, \langle\ ,\ \rangle)$ gilt:*

$$(\nabla^{SM}_{X^T} Y^T)_u = -g(Y_p, u) X^T_u \tag{2.8}$$

$$(\nabla^{SM}_{X^T} Y^H)_u = \frac{1}{2}(R^M_p(u, X)Y)^H_u \tag{2.9}$$

$$(\nabla^{SM}_{X^H} Y^T)_u = (\nabla^M_X Y)^T_u + \frac{1}{2}(R^M_p(u, Y)X)^H_u \tag{2.10}$$

$$(\nabla^{SM}_{X^H} Y^H)_u = (\nabla^M_X Y)^H_u - \frac{1}{2}(R^M_p(X, Y)u)^T_u. \tag{2.11}$$

Beweis. Da SM eine Untermannigfaltigkeit von TM ist, wissen wir, dass für zwei Vektorfelder $A, B \in \Xi(SM)$ und ihre lokale Fortsetzung auf dem Tangentialbündel $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ gilt:

$$\nabla^{SM}_A B = pr_{T(SM)} \nabla^{TM}_{\widetilde{A}} \widetilde{B},$$

das heißt, der Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Sphärenbündel ist gegeben durch:

$$\nabla^{SM}_A B = \nabla^{TM}_{\widetilde{A}} \widetilde{B} - \langle\ \nabla^{TM}_{\widetilde{A}} \widetilde{B}, N\ \rangle\ N. \tag{2.12}$$

Da wir aber die kovariante Ableitung nur für geliftete Vektorfelder auf M benötigen und weil sich das Normalenvektorfeld und somit nicht nur der horizontale, sondern auch der tangentiale Lift auf ganz TM definieren lässt, können wir hier auf die Kennzeichnung der lokal fortgesetzten Vektorfelder verzichten.

zu (2.8): Es gilt:

$$\begin{aligned}\nabla^{TM}_{X^T} Y^T = \; & \overbrace{\nabla^{TM}_{X^V} Y^V}^{=0} - \nabla^{TM}_{g(X,u)N} Y^V \\ & - \nabla^{TM}_{X^V} \; (g(Y,u) \; N) + \nabla^{TM}_{g(X,u)N} \; (g(Y,u) \; N).\end{aligned}$$

Weil $\nabla_A B$ in A C^∞-linear ist und sich jedes rein vertikale Vektorfeld punktweise als vertikaler Lift schreiben lässt, gilt auch: $\nabla^{TM}_{g(X,u)N} Y^V = 0$. Damit erhält man unter weiterer Ausnutzung der Eigenschaften des Zusammenhangs:

$$\begin{aligned}\nabla^{TM}_{X^T} Y^T &= g(X,u) \; N(g(Y,u)) \; N + g(X,u) \; g(Y,u) \; \nabla^{TM}_{N} N \\ & \quad - X^V (g(Y,u)) \; N - g(Y,u) \; \nabla^{TM}_{X^V} N.\end{aligned}$$

Wegen $\nabla^{TM}_N N = N$ und $\nabla^{TM}_{X^V} N = X^V$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla^{TM}_{X^T} Y^T = \; & \overbrace{\Big(g(X,u) \; N(g(Y,u)) + g(X,u) \; g(Y,u) - X^V (g(Y,u))\Big)}^{=:f(u)} \; N \\ & - g(Y,u) \; X^V.\end{aligned}$$

Da jedoch $f(u) \; N - \langle \; f(u)N, N \; \rangle \; N$, wegen $\langle N, N\rangle = 1$ auf dem Sphärenbündel verschwindet, vereinfacht sich Formel (2.12) zu:

$$\begin{aligned}\nabla^{SM}_{X^T} Y^T &= - \; g(Y,u) \; X^V - \langle -g(Y,u) X^V, N\rangle \; N \\ &= - \; g(Y,u) \; \Big(X^V - \langle X^V, N\rangle N\Big) = -g(Y,u) \; X^T.\end{aligned}$$

zu (2.9): Wegen der Tensoreigenschaft des Levi-Civita-Zusammenhangs im ersten Argument und weil sich X^T punktweise als vertikaler Lift schreiben lässt, gilt:

$$\nabla^{TM}_{X^T} Y^H = \nabla^{TM}_{X^V} Y^H = \frac{1}{2} (R^M (u,X) Y)^H.$$

Aus $\langle (R^M (u,X)Y)^H, N\rangle = 0$ folgt dann direkt die Behauptung.

zu (2.10): Es gilt:

$$\nabla^{TM}_{X^H} Y^T = \nabla^{TM}_{X^H} Y^T - X^H (g(Y,u)) \; N - g(Y,u) \; \overbrace{\nabla^{TM}_{X^H} N}^{=0}.$$

Analog zum Beweis von (2.8) erhält man:

$$\begin{aligned}
\nabla^{SM}_{X^H} Y^T &= \nabla^{TM}_{X^H} Y^T - \langle \nabla^{TM}_{X^H} Y^T, N\rangle\, N \\
&= (\nabla^M_X Y)^V + \frac{1}{2}\,(R^M(u,Y)X)^H - \langle (\nabla^M_X Y)^V, N\rangle\, N \\
&\quad - \underbrace{\langle (R^M(u,Y)X)^H, N\rangle}_{=0}\, N \\
&= (\nabla^M_X Y)^T + \frac{1}{2}\,(R^M(u,Y)X)^H.
\end{aligned}$$

Die Behauptung *(2.11)* folgt direkt aus Satz 1.18. □

2.4 Die Zweite Fundamentalform

Satz 2.8. *Es sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung des Punktes q und $u \in \pi^{-1}(U) \subset SM$. Die Zweite Fundamentalform von $(SM, \langle\ ,\ \rangle)$, als Untermannigfaltigkeit von $(TM, \langle\ ,\ \rangle)$, lautet für tangential bzw. horizontal geliftete Vektorfelder $X, Y \in \Xi(U)$:*

$$\mathrm{II}(X^T, Y^T)_u = -\langle X^T, Y^T\rangle_u N_u \tag{2.13}$$

$$\mathrm{II}(X^T, Y^H)_u = 0 \tag{2.14}$$

$$\mathrm{II}(X^H, Y^H)_u = 0. \tag{2.15}$$

Beweis. Die Zweite Fundamentalform II zweier Vektorfelder $A, B \in \Xi(SM)$ ist definiert als:

$$\mathrm{II}(A,B) = \nabla^{TM}_{\tilde{A}} \tilde{B} - \nabla^{SM}_A B = \langle\ \nabla^{TM}_{\tilde{A}} \widetilde{B}, N\ \rangle\ N,$$

wobei wir wie in Satz 2.7 mit $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ die lokale Fortsetzung von A und B auf TM bezeichnen. Da wir auch hier nur Lifts von Vektorfeldern auf M betrachten, können wir wie bei Satz 2.7 im Folgenden auf eine besondere Kennzeichnung der Fortsetzung verzichten.

zu (2.13): Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(X^T, Y^T) &= \langle\ \nabla^{TM}_{X^T} Y^T, N\ \rangle\ N \\
&= (X^T(\langle Y^T, N\rangle) - \langle Y^T\ ,\ \nabla^{TM}_{X^T} N\rangle) N \\
&= X^T(\langle Y^T, N\rangle) N - \langle X^T\ ,\ Y^T\rangle N.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass der Term $X^T(\langle Y^T, N\rangle)N$ verschwindet:

$$\begin{aligned} X^T(\langle Y^T, N\rangle) &= (X^V - g(X,u)N)(\langle Y^V - g(Y,u)N \ , \ N\rangle) \\ &= X^V(\langle Y^V, N\rangle) - X^V(g(Y,u)\langle N,N\rangle) \\ &\quad - g(X,u)N(\langle Y^V, N\rangle) + g(X,u)N(g(Y,u)\langle N,N\rangle). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.5 und den Identitäten

$$\begin{aligned} N(\langle Y^V, N\rangle) &= -\langle \overbrace{\nabla^{TM}_N Y^V}^{=0} \ , \ N\rangle - \langle Y^V \ , \ \nabla^{TM}_N N\rangle = -\langle Y^V \ , \ N\rangle = g(Y,u) \\ X^V(\langle N,N\rangle) &= -2\langle \nabla^{TM}_{X^V} N \ , \ N\rangle = -2\langle X^V \ , \ N\rangle = -2g(X,u) \\ N(\langle N,N\rangle) &= -2\langle N \ , \ \nabla^{TM}_N N\rangle = -2\langle N,N\rangle = -2g(u,u) \end{aligned}$$

erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} X^T(\langle Y^T, N\rangle) &= g(X,Y) - g(X,Y)g(u,u) + 2g(X,u)g(Y,u) \\ &\quad - g(X,u)g(Y,u) + g(X,u)g(Y,u)g(u,u) \\ &\quad - 2g(X,u)g(Y,u)g(u,u) \end{aligned}$$

und das ist für $u \in SM$ gleich Null.

zu (2.14): Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(X^T, Y^H) &= \langle \ \nabla^{TM}_{X^T} Y^H, N \ \rangle \ N \\ &= \ (X^T(\underbrace{\langle Y^H, N\rangle}_{=0}) - \langle Y^H \ , \ \underbrace{\nabla^{TM}_{X^V} N}_{=X^V}\rangle)N = 0. \end{aligned}$$

zu (2.15): Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(X^H, Y^H) &= \langle \ \nabla^{TM}_{X^H} Y^H, N \ \rangle \ N \\ &= (X^H(\underbrace{\langle Y^H, N\rangle}_{=0}) - \langle Y^H \ , \ \underbrace{\nabla^{TM}_{X^H} N}_{=0}\rangle)N = 0. \end{aligned}$$

$\square$

2.5 Die Krümmung

Satz 2.9. *([5], S. 432) Sei $q \in M$, $U \subset M$ eine kleine Umgebung von q, $X, Y, Z \in \Xi(U)$, $u \in \pi^{-1}(U) \subset SM$ und $p := \pi(u)$. Dann gilt:*

$$R_u^{SM}(X^T, Y^T)Z^T = - \langle X^T, Z^T \rangle_u \; Y_u^T + \langle Z^T, Y^T \rangle_u \; X_u^T \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} R_u^{SM}(X^T, Y^H)Z^T = \Bigg(& \frac{1}{2} R_p^M (X - g(X_p, u)u \; , \; Z - g_p(Z_p, u)u) \; Y \\ & + \frac{1}{4} R_p^M(u, X) \; R_p^M(u, Z) Y \Bigg)_u^H \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} R_u^{SM}(X^H, Y^H)Z^T = \Bigg(& R_p^M(X, Y) \; (Z - g(Z_p, u)u) \\ & + \frac{1}{4} R_p^M(Y \; , \; R_p^M(u, Z)X) \; u \\ & - \frac{1}{4} R_p^M(X \; , \; R_p^M(u, Z)Y) \; u \Bigg)_u^T \\ & + \frac{1}{2} \big(\, (\nabla_X^M R^M)(u, Z)Y - (\nabla_Y^M R^M)(u, Z)X \, \big)_u^H \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} R_u^{SM}(X^T, Y^T)Z^H = \Bigg(& R_p^M (X - g(X_p, u)u \; , \; Y - g(Y_p, u)u) \; Z \\ & + \frac{1}{4} [R_p^M(u, X) \; , \; R_p^M(u, Y)] Z \Bigg)_u^H \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} R_u^{SM}(X^H, Y^T)Z^H = \Bigg(& \frac{1}{2} R_p^M(X, Z) \; (Y - g(Y_p, u)u) \\ & - \frac{1}{4} R_p^M(X \; , \; R_p^M(u, Y)Z) \; u \Bigg)_u^T \\ & + \left(\frac{1}{2} (\nabla_X^M R^M)(u, Y) Z \right)_u^H \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} R_u^{SM}(X^H, Y^H)Z^H = \Bigg(& R_p^M(X, Y)Z + \frac{1}{2} R_p^M(u \; , \; R_p^M(X, Y)u) \; Z \\ & - \frac{1}{4} R_p^M(u \; , \; R_p^M(Y, Z)u) \; X \\ & + \frac{1}{4} R_p^M(u \; , \; R_p^M(X, Z)u) \; Y \Bigg)_u^H \\ & + \Big((\nabla_Z^M R^M)(X, Y) u \Big)_u^T . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Beweis. Mit Hilfe der Gauß-Gleichung (vgl. [8], S. 38)

$$\begin{aligned} R(A,B,C,D) = \bar{R}(A,B,C,D) &- \bar{g}\,(\mathrm{II}(A,C)\ ,\ \mathrm{II}(B,D)) \\ &+ \bar{g}\,(\mathrm{II}(A,D)\ ,\ \mathrm{II}(B,C)) \end{aligned} \tag{2.22}$$

kann man aus der Krümmung $\bar{R}$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\bar{M}, \bar{g})$ und der zweiten Fundamentalform die Krümmung R einer Untermannigfaltigkeit (M, g) für Vektorfelder $A, B, C, D \in \Xi(M)$ berechnen.

Betrachtet man nur horizontale und tangentiale Lifts von Vektorfeldern $X, Y, Z, \xi \in \Xi(U)$, so stellt man fest, dass die Krümmung von Tangential- und Sphärenbündel ausschließlich im Fall $R(X^T, Y^T, Z^T, \xi^T)$ nicht übereinstimmt. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} R^{SM}(X^T, Y^T, Z^T, \xi^T) &= \overbrace{R^{TM}(X^T, Y^T, Z^T, \xi^T)}^{=0} - \langle \mathrm{II}(X^T, Z^T)\ ,\ \mathrm{II}(Y^T, \xi^T)\rangle \\ &\quad + \langle \mathrm{II}(X^T, \xi^T)\ ,\ \mathrm{II}(Y^T, Z^T)\rangle \\ &= \langle X^T, \xi^T\rangle\langle Y^T, Z^T\rangle - \langle X^T, Z^T\rangle\langle Y^T, \xi^T\rangle \\ &= \langle \langle Y^T, Z^T\rangle X^T - \langle X^T, Z^T\rangle Y^T\ ,\ \xi^T\rangle. \end{aligned}$$

In allen anderen Fällen folgt die Behauptung, wenn man die tangentialen Lifts punktweise als vertikale Lifts schreibt (vgl. Bemerkung 2.2) und den Satz 1.20 anwendet. □

Bei den folgenden beiden Sätzen sei auf den Beweis von Boeckx und Vanhecke in [6] verwiesen.

Satz 2.10. *([6], S. 538) $(SM, \langle\ ,\ \rangle)$ ist genau dann Einstein, wenn M entweder zu $\mathbb{R}^2$ oder zu S^2 lokal isometrisch ist.*

Satz 2.11. *([6], S. 542) Die Ricci-Krümmung des Sphärenbündels mit der Sasaki-Metrik ist genau dann parallel, wenn die Krümmung von M konstant gleich Null oder gleich Eins ist. Insbesondere ist genau in diesen beiden Fällen SM lokal symmetrisch.*

2.6 Das Sphärenbündel über S^n

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das Sphärenbündel der n-Sphäre $\mathrm{S}(S^n)$ diffeomorph zum homogenen Raum $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)$ ist (vgl. [7]).

Hierfür betrachten wir in einer allgemeineren Überlegung zunächst das Rahmenbündel der orthonormalen Basen über einer Mannigfaltigkeit M. Wir bezeichnen dieses mit $\mathrm{O}M$. Bildet man dieses Vektorbündel mit Hilfe der

Abbildung $\psi_n :\ \mathrm{O}M \longrightarrow SM$, die eine Orthonormalbasis $v_1, ..., v_n$ im Punkt $p \in M$ auf $(p, v_n) \in SM$ projeziert, auf das Sphärenbündel ab, so kann man ψ_n als Submersion auffassen, deren Fasern diffeomorph zu der Gruppe der Matritzen

$$\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A \in \mathrm{O}(n-1)\} \subset \mathrm{O}(n)$$

und damit diffeomorph zu $\mathrm{O}(n-1)$ sind. Damit lässt sich nun SM als Quotientenraum $\mathrm{O}M/\mathrm{O}(n-1)$ schreiben.

Analog kann man für eine orientierbare Mannigfaltigkeit M das Sphärenbündel SM als Quotient $\mathrm{O}_+M/\mathrm{SO}(n-1)$ auffassen, wobei wir mit O_+M das Rahmenbündel der positiven Orthonormalbasen bezeichnen.

Da die Mannigfaltigkeit S^n diffeomorph zu $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ ist und da jede Faser von $\mathrm{O}_+(S^n)$ zu $\mathrm{SO}(n)$ diffeomorph ist, folgt

$$\mathrm{O}_+(S^n) \mathrel{\hat{\cong}} \mathrm{O}_+(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)) \mathrel{\hat{\cong}} \mathrm{SO}(n+1)$$

und damit insgesamt:

$$\mathrm{S}(S^n) \mathrel{\hat{\cong}} \mathrm{O}_+(S^n)/\mathrm{SO}(n-1) \mathrel{\hat{\cong}} \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1).$$

Allgemeiner gilt folgender Satz, der in [7] bewiesen wird:

Satz 2.12. *([7], S.13) Das Sphärenbündel der n-Sphäre mit der Sasaki-Metrik ist isometrisch zur Mannigfaltigkeit* $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)$ *mit einer von* $\mathrm{SO}(n+1)$ *induzierten biinvarianten Metrik.*

Kapitel 3

Die Fast-Kähler-Struktur des Tangentialbündels

Auf dem Tangentialbündel ist durch die Aufspaltung jedes Tangentialraumes in den Kern der horizontalen Projektion und den Kern der vertikalen Projektion eine natürliche *fast komplexe Struktur* gegeben:

Diese kann man definieren als Endomorphismus $J: \ T(TM) \longrightarrow T(TM)$, mit der Eigenschaft:

$$\pi_*(JA) = -\varphi_* A \tag{3.1}$$
$$\varphi_*(JA) = \ \ \pi_* A \tag{3.2}$$

für alle $A \in T(TM)$. Eine äquivalente Definition unter Verwendung der Lifts erhält man, wenn man J definiert als den Endomorphismus auf $T(TM)$, für den gilt:

$$JX^{V} = -X^{H} \tag{3.3}$$
$$JX^{H} = \ \ X^{V} \tag{3.4}$$

für alle Vektorfelder $X \in \Xi(M)$. Der Endomorphismus J ist aufgrund der Linearität der Projektionen durch (3.1) und (3.2) eindeutig bestimmt. Die Äquivalenz der beiden Definitionen folgt direkt aus den Eigenschaften der Lifts.

Die Sasaki-Metrik $\langle \ , \ \rangle$ ist wegen

$$\begin{aligned}\langle JA \ , \ JB \rangle &= g(\pi_*(JA) \ , \ \pi_*(JB)) + g(\varphi_*(JA) \ , \ \varphi_*(JB)) \\ &= g(\varphi_* A \ , \ \varphi_* B) + g(\pi_* A \ , \ \pi_* B) \\ &= \langle A \ , \ B \rangle\end{aligned}$$

eine hermitesche Metrik bezüglich dieser fast komplexen Struktur.

Um zu zeigen, dass die Sasaki-Metrik auf TM sogar Kähler ist, muss man noch zeigen, dass die fundamentale 2-Form ω, definiert durch

$$(A,B) \mapsto \omega(A,B) := g(A, JB), \tag{3.5}$$

geschlossen ist. Dies ergibt sich direkt aus dem folgenden Satz:

Satz 3.1. *([3], S. 81) Die 2-Form ω ist eine exakte Differentialform und für die 1-Form θ, die für jedes $u \in TM$ ein $A \in T_u(TM)$ abbildet auf:*

$$\theta(A) := g(u\ ,\ \pi_* A), \tag{3.6}$$

gilt:

$$\omega = d\theta. \tag{3.7}$$

Beweis. Es seien $X, Y \in \Xi(M)$. Dann gilt für ω:

$$\omega(X^V, Y^V) = \omega(X^H, Y^H) = 0 \tag{3.8}$$
$$\text{und} \quad \omega(X^V, Y^H) = -\omega(X^H, Y^V) = g(X,Y) \circ \pi. \tag{3.9}$$

Durch diese beiden Gleichungen ist ω vollständig definiert. Es genügt also, (3.8) und (3.9) für $d\theta$ zu zeigen. Für den Beweis sei auf [3] verwiesen. □

Es stellt sich nun die Frage, wann die Fast-Kähler-Mannigfaltigkeit des Tangentialbündels mit der Sasaki-Metrik eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist. Die Antwort gibt der folgende Satz:

Satz 3.2. *([3], S. 77) Die Mannigfaltigkeit $(TM, \langle\ ,\ \rangle, J)$ ist genau dann Kähler, wenn M flach ist.*

Beweis. Nach den Vorüberlegungen reicht es zu zeigen, dass R^M genau dann gleich Null ist, wenn (TM, J) eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, und das ist äquivalent dazu, dass die Torsion von J, definiert durch

$$N(A,B) = 2\left([JA, JB] - [A,B] - J[A, JB] - J[JA, B]\right),$$

für alle Vektorfelder $A, B \in \Xi(TM)$ konstant gleich Null ist (vgl. [10], S. 124).

Das (1,2)-Tensorfeld N hat folgende Eigenschaften:

$$N(JA, B) = JN(A,B)$$
$$\text{und} \quad N(JA, JB) = -N(A,B).$$

Damit gilt für $X, Y \in \Xi(M)$:

$$N(Y^V, X^H) = N(X^H, Y^V) = -N(JX^V, Y^V) = -JN(X^V, Y^V)$$

und
$$N(X^H,Y^H) = N(JX^V,JY^V) = -N(X^V,Y^V).$$
Ferner gilt:
$$N(X^V,Y^V) = 2([X^H,Y^H] - [X^V,Y^V] + J[X^V,Y^H] + J[X^H,Y^V]).$$
Nach Satz 1.17 erhalten wir schließlich:
$$N_u(X^V,Y^V) = -2(R^M(X,Y)u)_u^V + 2(\overbrace{\nabla_Y^M X - \nabla_X^M Y + [X,Y]}^{=\,-T})_u^H$$
für jeden Punkt $u \in TM$. Da die Torsion T des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇^M verschwindet, ergibt sich insgesamt:
$$\begin{aligned} N_u(X^V,Y^V) &= -2(R^M(X,Y)u)_u^V \\ N_u(X^V,Y^H) &= -2(R^M(X,Y)u)_u^H \\ N_u(X^H,Y^V) &= \ \ 2(R^M(X,Y)u)_u^H \\ N_u(X^H,Y^H) &= \ \ 2(R^M(X,Y)u)_u^V \end{aligned}$$
und damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 3.3. *Die fundamentale 2-Form dieser Fast-Kähler-Struktur auf dem Tangentialbündel ω ist, wie oben gezeigt, geschlossen und, da die Metrik $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit ist, nicht ausgeartet. Damit definiert ω eine symplektische Struktur auf dem Tangentialbündel. Dabei handelt es sich um die kanonische symplektische Struktur auf dem Tangentialbündel mit der Liouville-Form θ (vgl. [11]).*

Satz 3.4. *Durch die 1-Form θ ist auf dem Sphärenbündel SM eine Kontaktstruktur mit charakteristischem Vektorfeld $\xi = -JN$ gegeben (vgl. [11]).*

Beweis. Es gilt für $u \in SM$ und $A \in \Xi(SM)$:
$$\theta(-JN_u) = g(u,u) = 1 \qquad \text{und} \qquad \omega(-JN, A) = \langle N, A\rangle \equiv 0.$$
Da ω^n auf $\{A \in T_u(TM) \mid \langle A, JN_u\rangle = 0\}$ nirgendwo verschwindet (und θ überall), gilt:
$$\theta \wedge (d\theta)^n = \theta \wedge \omega^n \neq 0.$$
□

Schluss

„g_S is perhaps the most natural metric on TM depending only on the Riemannian structure on M, but it is extremely rigid.“ [7], so kommentieren Musso und Tricerri das Resultat aus dem Satz 1.24 dieser Arbeit, der ja unter anderem besagt, dass das Tangentialbündel einer nicht flachen Mannigfaltigkeit niemals Einstein sein kann.

Freilich können auf dem Tangentialbündel andere Metriken eingeführt werden, die durchaus über interessante Eigenschaften verfügen, wie zum Beispiel die Cheeger-Gromoll-Metrik, die ebenfalls in [7] untersucht wird.

Zwar sind auch auf dem Sphärenbündel die Eigenschaften der Sasaki-Metrik, wie aus den Sätzen 2.10 und 2.11 hervorgeht, sehr beschränkt, doch diese prinzipiellen Einschränkungen sind etwas schwächer als beim Tangentialbündel. So ist beispielsweise das Sphärenbündel über S^2 mit der Sasaki-Metrik eine Einstein-Mannigfaltigkeit. Dies lässt sich sogar noch verallgemeinern:

„...the Einstein metric on T_1S^n defined by Kobayashi can be obtained by deforming the induced Sasaki metric g'_S along the direction of the canonical contact form of T_1S^n. Clearly the projection $\pi : T_1S^n \longrightarrow S^n$ is no longer a Riemannian submersion. This is the price to be paid for an Einstein metric.“[7]

Literaturverzeichnis

[1] S. Sasaki, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tohoku Mathematical Journal 10, No. 3 (1958), pp. 338–354.

[2] S. Sasaki, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Part II*, Tohoku Mathematical Journal 14, No. 2 (1962), pp. 146–155.

[3] P. Dombrowski, *On the Geometry of the Tangent Bundle*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 210 (1962), pp. 73–88.

[4] O. Kowalski, *Curvature of the Induced Riemannian Metric on the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 250 (1971), pp. 124–129.

[5] E. Boeckx, L. Vanhecke, *Characteristic Reflections on Unit Tangent Sphere Bundles*, Houston Journal of Mathematics 23, No. 3 (1997), pp. 427–448.

[6] E. Boeckx, L. Vanhecke, *Unit tangent sphere bundles with constant scalar curvature*, Czechoslovak Mathematical Journal 51 (2001), pp. 523–544.

[7] E. Musso, F. Tricerri, *Riemannian Metrics on Tangent Bundles*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 150, No. 1 (1988), pp. 1–19.

[8] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin Heidelberg, 1987.

[9] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry: 1*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[10] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry: 2*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[11] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2002.