Gruppenwirkungen und Kohomologie

Ankündigung Vorlesung

Sommersemester 2020

Dr. Sam Hagh Shenas Noshari

Welche endlichen Gruppen wirken frei auf einer Sphäre? Für die 2–Sphäre und für zyklische Gruppen wurde diese Frage von L. Brouwer [1] und B. Kérékjártó [2] unabhängig voneinander beantwortet. Fasst man nämlich die Elemente der wirkenden Gruppe als Selbstabbildungen der Sphäre auf, so entsprechen diese im wesentlichen Drehungen des umgebenden Euklidischen Raumes, möglicherweise gefolgt von einer Ebenenspiegelung.

Um eine zwar nicht äquivalente, aber immerhin erschöpfende Charakterisierung der eingangs erwähnten Gruppen für Sphären beliebiger Dimension zu erhalten, muss von einer derart expliziten Beschreibung der einzelnen Gruppenelemente abgesehen werden. Der zielführendere, von P. Smith erdachte und nunmehr eine gleichnamige Theorie begründende Ansatz besteht stattdessen darin, die Topologie der Sphäre, genauer: ihre Kohomologie, mit jener der Fixpunktmenge der Gruppenoperation in Beziehung zu setzen [3]. Auf diese Weise konnte Smith nachweisen, dass alle Abelschen Untergruppen der wirkenden Gruppe zyklisch sein müssen — und Gruppen dieser Art sind klassifiziert (bemerkenswerterweise kann auf Sphären gerader Dimension lediglich die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ frei wirken; dies ist eine Konsequenz des Lefschetzschen Fixpunktsatzes, gemäß welchem eine Selbstabbildung einer solchen Sphäre entweder deren Orientierung invertieren oder einen Fixpunkt besitzen muss).

Zentraler Gegenstand dieser Vorlesung ist nun ein moderner Ableger der Smith–Theorie, die äquivariante Kohomologie nach A. Borel [6]. Hierbei handelt es sich um eine Kohomologietheorie für Lie–Gruppenwirkungen, die einer Wirkung eine Algebra zuordnet. Ist die Wirkung frei, berechnet die äquivariante Kohomologie die gewöhnliche Kohomologie des Orbitraumes. Ist die wirkende Gruppe endlich, stimmen äquivariante Kohomologie– und Smith–Theorie überein. Ist der Raum, auf welchem operiert wird, ein Punkt, erhält man die sogenannte Gruppenkohomologie der wirkenden Gruppe. Allgemeiner gesprochen, korrespondieren gewisse algebraische Eigenschaften der äquivarianten Kohomologie mit gewissen Eigenschaften der Wirkung und der Topologie des betrachteten Raumes.

Die Definition der äquivarianten Kohomologie bedarf einer gewöhnlichen Kohomologietheorie. Zu Beginn der Vorlesung rekapitulieren wir daher einige algebraisch–topologische Begriffe und konstruieren außerdem den ebenfalls für die Definition benötigten klassifizierenden Raum einer Lie–Gruppe. Anschließend widmen wir uns Methoden zur Berechnung der äquivarianten Kohomologie. Dies führt unter anderem zum Konzept der Faserungen und der Spektralsequenzen sowie zu Lokalisierungstechniken wie dem Borel–Quillen–Lokalisierungssatz. Im letzten Teil der Vorlesung diskutieren wir schließlich Anwendungen im Kontext von Gruppenwirkungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Neben Smiths Resultat leiten wir hier Darstellungen der gewöhnlichen Kohomologie von homogenen Räumen her und erklären, warum die Euler–Charakteristiken einer Mannigfaltigkeit mit Toruswirkung und seiner Fixpunktmenge identisch sind. Sofern Zeit und Interesse besteht, geben wir einen Ausblick, wie in speziellen Situationen die Ringstruktur der äquivaranten Kohomologie in einem Graph kodiert werden kann.

Vorkenntnisse

Mengentheoretische Topologie. Vertrautheit mit Begriffen der algebraischen Topologie ist vorteilhaft, aber nicht unerlässlich. Grundkenntnisse über Lie–Gruppen und Mannigfaltigkeiten, wie sie z.B. in der Vorlesung „Differentialgeometrie“ oder den ersten drei Kapiteln in [8] vermittelt werden.

Literatur

Wirkungen endlicher Gruppen.

[1] Brouwer, L. E. J. *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, Math. Annalen 80 (1919).
[2] Kérékjártó, B. *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und Kugelfläche*, Math. Annalen 80 (1919).
[3] Smith, P. A. *Permutable Periodic Transformations.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 30 (1944).
[4] Adem, A. und Davis, J. F. *Topics in Transformation Groups.* Kapitel I in *Handbook of Geometric Topology* (2001).

Äquivariante Kohomologie, Differentialgeometrie und Lie–Gruppen.

[5] Allday, C. und Puppe, V. *Cohomological Methods in Transformation Groups.* Cambridge University Press (1993).
[6] Borel, A. *Seminar on Transformation Groups.* Princeton Univ. Press (1960).
[7] Goertsches, O. und Zoller, L. *Equivariant de Rham cohomology.* São Paulo J. Math. Sci. 13 (2019).
[8] Warner, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer–Verlag New York (1983).

igt

Institut für Geometrie und Topologie
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart