Übungszettel 9 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 10.12.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass ein zusammenziehbarer Raum wegzusammenhängend ist.

(ii) Seien X_1 und X_2 homotopieäquivalente Räume und Y_1 und Y_2 homotopieäquivalent. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $X_1 \times Y_1$ und $X_2 \times Y_2$ homotopieäquivalent sind.

(iii) Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $h \simeq f$. Zeigen Sie, dass h eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $[\sum_{i \in I} X_i, Y] \cong \prod_{i \in I} [X_i, Y]$ für topologische Räume X_i und Y. Sie dürfen I als endlich annehmen.

Aufgabe 3. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume. Zeigen Sie, dass X und Y dieselbe Anzahl (Kardinalität) von Wegzusammenhangskomponenten haben. (Sie dürfen annehmen, dass diese endlich ist.)

Aufgabe 4. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ zwei verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \setminus \{x, y\}$ homotopieäquivalent zu $(\mathbb{S}^2 + \mathbb{S}^2)/\{(1,0,0) \times \{0\} \cup (1,0,0) \times \{1\}\}$ ist.

Aufgabe 5. Eine topologische Gruppe G ist eine Gruppe, die zugleich ein topologischer Raum ist, so dass die Gruppenoperation $G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh$ und die Inversenabbildung $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetig sind. Hierbei sei $G \times G$ natürlich mit der Produkttopologie versehen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, die Gruppe der invertierbaren Matrizen, versehen mit der Unterraumtopologie der $n \times n$-Matrizen, aufgefasst als $\mathbb{R}^{n^2}$, ist eine topologische Gruppe und $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, die Matrizen mit Determinante 1 bilden eine abgeschlossene Untergruppe.

(ii) Sei G eine topologische Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler (versehen mit der Unterraumtopologie). Dann ist der kanonische Epimorphismus $G \to G/N$ eine offene Abbildung.

(iii) Ist G eine topologische Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler, so ist G/N eine topologische Gruppe.

(iv) Sei G eine topologische Gruppe, die als topologischer Raum wegzusammenhängend ist. Dann ist die Linksmultiplikation mit einem Element $g \in G$, d.h. die Abbildung $G \to G, h \mapsto gh$, homotop zur Identität auf G.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ so, dass $\{x\}$ ein starker Deformationsretrakt von X ist. Dann existiert für jede Umgebung U von x eine Umgebung $V \subseteq U$ von x, so dass die Einbettung $V \to U$ nullhomotop ist.

(ii) Sei $X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{r\} \times [0, 1-r]$ versehen mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}^2$ (siehe Hatcher, Kapitel 0, Übung 6(a) für eine Skizze). Dann ist jeder Punkt von $[0,1] \times \{0\}$, aber kein anderer Punkt von X, ein starker Deformationsretrakt von X.