Übungszettel 8 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 3.12.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass es keine injektive stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass je zwei Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ homotop sind.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, indem Sie explizit Homöomorphismen $f : U \to \mathbb{R}^n$ angeben. (Hinweis: In der Vorlesung wurden lokale Koordinaten erwähnt, d.h. man schreibt $[(x_0, \ldots, x_n)] =: [x_0 : \cdots : x_n]$. Nun definiere $[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$.)

Aufgabe 3. Sei $M := \mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) | z_i \in \mathbb{C}, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und sei $A : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ gegeben durch $A(z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2)$ und $\Gamma_{p,q} := \{A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{p-1}\}$. Zeigen Sie:

(i) $\Gamma_{p,q}$ ist eine Gruppe.

(ii) $\Gamma_{p,q}$ ist isomorph zur additiven Gruppe von $\mathbb{Z}_p$.

(iii) $\mathbb{S}^3 / \Gamma_{p,q}$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit, der sogenannte **Linsenraum**.

Aufgabe 4. Seien $f_1, f_2 : X \to Y$ und $g_1, g_2 : Y \to Z$ Abbildungen mit $f_1 \simeq f_2$ und $g_1 \simeq g_2$. Dann gilt $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Aufgabe 5. Seien $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ Abbildungen mit $f(z) \neq g(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie, dass $f \simeq g$.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. Führen Sie die Teilschritte zur Klassifikation der eindimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten im Beweis, den Sie unter folgendem Link finden, aus:

http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/2010/Topologie/Gale%20-%201-manifolds.pdf

Beachten Sie, dass die Definition einer Mannigfaltigkeit leicht von der in der Vorlesung gegebenen abweicht.