Übungszettel 7 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 26.11.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass nulldimensionale Mannigfaltigkeiten abzählbare Mengen mit diskreter Topologie sind.

(ii) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Untermannigfaltigkeiten:

- $A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 1\}$
- $A_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$
- $A_3 := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 1 \in \mathbb{N}\}$
- $A_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 || x| - y = -1\}$
- $A_5 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 || x| - y < -2\}$
- $A_6 := \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in (-2,-1)\}$
- $A_7 := \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [-4,-3)\}$
- $A_8 := \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y < -5 \,\text{und}\, y \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie, dass jedes offene Intervall (a,b) homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder offene Ball $B_\varepsilon(x)$ in $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass endliche Produkte von Mannigfaltigkeiten wieder Mannigfaltigkeiten sind.

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurde der Satz, dass für eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und eine endliche Gruppe Γ von Homöomorphismen, die fixpunktfrei auf M operieren, der Quotient eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist, nur teilweise bewiesen. Vervollständigen Sie den Beweis, indem Sie zeigen, dass M/Γ hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis hat.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe geht es um die Anwendung des Satzes der vorhergehenden Aufgabe.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Operation von $\{\pm 1\}$ auf $\mathbb{S}^n$ durch die Antipodenabbildung die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und somit $\mathbb{R}P^n$ eine Mannigfaltigkeit ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Voraussetzung der Fixpunktfreiheit notwendig ist, indem Sie das Beispiel $\mathbb{D}^2/\sim$, wobei $x \sim -x$ für alle $x \in \mathbb{D}^2$ ist, betrachten.

Aufgabe 5. In der Vorlesung wurde $\mathbb{R}P^2$ definiert als $\mathbb{S}^2/\{\pm\,\mathrm{id}\}$, wobei die Operation durch die Antipodenabbildung gegeben ist. In dieser Aufgabe geht es um äquivalente Konstruktionen. Zeigen Sie, dass jeder der folgenden Räume homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$ ist:

(i) $\mathbb{D}^2/\sim$, wobei $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1$ (und alle anderen Punkte nur mit sich selbst identifiziert werden).

(ii) $\mathbb{M}/\partial\mathbb{M}$, wobei $\mathbb{M}$ das Möbiusband ist. Es entsteht aus dem Quadrat $[-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ durch gegenläufiges Verkleben eines gegenüberliegenden Seitenpaares $\{-1\} \times [-1,1]$ und $\{1\} \times [-1,1]$, d.h. $\mathbb{M} := [-1,1]^2/\sim$, wobei $(-1,t) \sim (1,-t)$ für alle $t \in [-1,1]$ (und alle anderen Punkte werden wieder nur mit sich selbst identifiziert).

(iii) Es sei die stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ durch $f(z) = z^2$ (hier wird $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ aufgefasst) gegeben. Definiere C_f durch $C_f := C\mathbb{S}^1 + \mathbb{S}^1/\sim$, wobei $\sim$ gegeben ist durch $[(z,0)] \sim f(z)$. Hier ist $C\mathbb{S}^1$ wie in der Vorlesung der Kegel über $\mathbb{S}^1$.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. Diese Aufgabe behandelt erneut den Satz von Tychonoff, dass beliebige Produkte kompakter Mengen kompakt sind. Im Beweis der letzten Knobelaufgabe wurde gezeigt, dass der Satz von Tychonoff mithilfe des Auswahlaxioms (in der äquivalenten Form des Zornschen Lemmas) bewiesen werden kann. In dieser Aufgabe sollen Sie nun zeigen, dass aus der Gültigkeit des Satzes von Tychonoff sogar das Auswahlaxiom folgt. Und zwar beweisen Sie folgende Formulierung des Auswahlaxioms: Sei I eine Menge. Für jede Familie nichtleerer Mengen X_i, $i \in I$ ist das Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ nicht-leer. Beweisen Sie dazu folgende Teilaussagen:

(i) Sei ∞ ein Punkt, der in keinem X_i enthalten ist; wir setzen $Y_i := X_i \cup \infty$ mit der Topologie $\mathcal{T}_i := \{\emptyset, \{\infty\}, Y_i\}$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Tychonoff, dass $Y := \prod_{i\in I} Y_i$ kompakt ist.

(ii) Für jedes $i \in I$ setze $A_i := \{y \in Y | y_i \in X_i\}$. Zeigen Sie, dass die A_i die Voraussetzungen von Zettel 6, Aufgabe 1 (i) erfüllen und folgern Sie daraus das Auswahlaxiom in der oben stehenden Formulierung.