Übungszettel 6 - Topologie

Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 19.11.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

- Aufgabe 1.** (i) Sei X kompakt. Sei I eine Menge. Seien $A_i \subseteq X$, $i \in I$ abgeschlossene Mengen, so dass für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$. Dann gilt $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.
- (ii) Seien $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen und sei $\{n\mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Basis einer Topologie. Sind dann die natürlichen Zahlen mit dieser Topologie hausdorffsch, zusammenhängend bzw. kompakt?
- (iii) Sei Y kompakt. Zeigen Sie, dass dann die Projektionsabbildung $\pi : X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$ abgeschlossen ist.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt: $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Offenbar ist jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Zeigen Sie: Ist X kompakt, so ist jede stetige Abbildung sogar gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ sei die **1-Punkt-Kompaktifizierung** $(X_\infty, \mathcal{O}_\infty)$ definiert durch $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ mit $\infty \notin X$ und

$$\mathcal{O}_\infty := \mathcal{O} \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} \mid K \subseteq X, K \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_\infty$ eine Topologie auf X ist und dass $\{\infty\}$ abgeschlossen ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $(X_\infty, \mathcal{O}_\infty)$ kompakt ist.
- (iii) Ein topologischer Raum heiße **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Zeigen Sie: X_∞ ist genau dann hausdorffsch, wenn X hausdorffsch und lokalkompakt ist.

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter metrischer Raum mit einer Metrik d . Sei I eine Menge und sei $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X . Zeigen Sie, dass es dann eine positive Zahl λ gibt, so dass für jede Menge $B \subseteq X$ mit $\sup_{p, q \in B} \{d(p, q)\} < \lambda$ gilt: $B \subseteq V_j$ für ein $j \in I$.

Aufgabe 5. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist. Zeigen Sie:

- (i) Die Identität $\text{id}_X : X \rightarrow X$, $x \mapsto x$ ist eigentlich.
- (ii) f ist eigentlich, falls f abgeschlossen ist (d.h. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen) und $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ kompakt ist.
- (iii) Ist $g \circ f$ eigentlich und f surjektiv, so ist g eigentlich.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. Diese Aufgabe behandelt den Satz von Tychonoff, dass beliebige Produkte kompakter Mengen kompakt sind.

- (i) Sei I eine Menge. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ topologische Räume. Dann definiert $\{\pi_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \in \mathcal{O}_i\}$ eine Subbasis mit der Eigenschaft, dass jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Wir wollen nun zeigen, dass die Existenz einer solchen Subbasis ausreicht, damit der Raum kompakt ist. Dazu definieren wir den Begriff des Filters: Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt **Filter**, wenn $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $U_1, U_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$ und $U \in \mathcal{F}$ und $U \subseteq V \subseteq M$, dann $V \in \mathcal{F}$. Für Filter kann man Konvergenz definieren: Ein Filter $\mathcal{F}$ **konvergiert** genau dann gegen $a \in M$, wenn jede Umgebung von a zu $\mathcal{F}$ gehört.

- (ii) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Definiere $\mathcal{F}$ als die Menge aller Mengen in denen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schließlich bleibt. Zeigen Sie, dass dies einen Filter definiert, der genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn die Folge x_n es tut.

Die Filter (nun wieder allgemein) sind bzgl. Inklusion partiell geordnet. Machen Sie sich klar, dass aus dem Zornschen Lemma folgt, dass jeder Filter in einem maximalen Filter enthalten ist. Einen solchen maximalen Filter nennt man **Ultrafilter**.

- (iii) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf M . Zeigen Sie, dass für eine Teilmenge $A \subseteq M$ genau eine der beiden Teilmengen A und $M \setminus A$ zu $\mathcal{F}$ gehört.
- (iv) Sei X ein topologischer Raum, der eine Subbasis $\mathcal{S}$ mit oben genannten Eigenschaften hat. Zeigen Sie, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert.
- (v) Wir beweisen nun im letzten Schritt durch Widerspruch, dass X kompakt ist. Sei dazu $\{U_i \mid i \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Zeigen Sie, dass die Obermengen aller $X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j$, wobei $J \subseteq I$ eine endliche Teilmenge ist, einen Filter bilden. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, der diesen Filter enthält. Durch Betrachtung des Grenzwertes kann man nun einen Widerspruch zur Definition eines Filters herstellen.