

Übungszettel 5 - Topologie

Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 12.11.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

- Aufgabe 1.** (i) Ordnen Sie die Großbuchstaben des Alphabets (ohne Umlaute) in Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation Homöomorphie. Nehmen Sie an, dass die einzelnen Striche Intervalle sind (also keine Breite haben). *Hinweis:* Ein Homöomorphismus schränkt sich auf Unterräume ein.
- (ii) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardtopologie, das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und finden Sie eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die zwar das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
- (iii) Sei X ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeigen Sie, dass jede disjunkte Familie offener Teilmengen von X höchstens abzählbar viele Elemente enthält.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde behauptet, dass "es gibt einen Weg von p nach q " offensichtlich eine Äquivalenzrelation ist. In dieser Aufgabe sollen Sie diese Behauptung präzise beweisen.

- (i) Sei $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so dass $\tilde{f}|_A$ konstant ist. Zeigen Sie, dass dann die durch $f : X/A \rightarrow Y$ mit $f([x]) = \tilde{f}(x)$ gegebene Abbildung stetig ist.
- (ii) Seien $p, q, r \in Y$, c ein stetiger Weg von p nach q und c' ein stetiger Weg von q nach r . Wenden Sie den vorherigen Aufgabenteil auf $X = [0, 1] + [0, 1]$ und $A = \{1\} \times \{0\} \cup \{0\} \times \{1\}$ und die Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow Y$, die gegeben ist durch $\tilde{f}((x, 0)) = c(x)$ und $\tilde{f}((x, 1)) = c'(x)$ (warum ist diese stetig), an.
- (iii) Zeigen Sie, dass "es gibt einen Weg von p nach q " eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3. Seien $f, g : X \rightarrow Y$ stetig und sei Y hausdorffsch. Zeigen Sie:

- (i) Der Graph $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.
- (ii) Die Inzidenzmenge $I(f, g) := \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in X . Insbesondere ist für $X = Y$ die Fixpunktmenge $\text{Fix}(f) := \{x \in X | f(x) = x\}$ abgeschlossen in X .
- (iii) Ist $D \subseteq X$ dicht, also $\overline{D} = X$ und gilt $f|_D = g|_D$, so gilt auch $f = g$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige (nicht notwendig abzählbare) Basis von X . Zeigen Sie, dass es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ gibt, so dass $\mathcal{B}'$ eine Basis von X ist.

Aufgabe 5. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein stetiger Weg, so dass $\gamma(0)$ ein innerer Punkt von A und $\gamma(1)$ ein äußerer Punkt von A ist. Zeigen Sie, dass es ein $t \in [0, 1]$ gibt, so dass $\gamma(t)$ ein Randpunkt von A ist.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. Die reellen $(n \times n)$ -Matrizen lassen sich mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren, also tragen, z.B. $\text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} | A = A^T\}$, $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\text{O}(n)$ Topologien, aufgefasst als Unterräume von $\mathbb{R}^{n^2}$. Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten dieser Räume.