

Übungszettel 4 - Topologie

Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 05.11.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass ein zwei- bzw. dreipunktiger Raum X genau dann hausdorffsch ist, wenn er die diskrete Topologie trägt.

(ii) Verallgemeinern Sie ihre Überlegungen in (i) auf beliebige endliche Mengen.

(iii) Untersuchen Sie die Räume mit diskreter Topologie auf (Weg-)Zusammenhang.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Seien X und Y nichtleere topologische Räume, $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

(i) $X \times Y$ ist genau dann hausdorffsch, wenn X und Y hausdorffsch sind.

(ii) $X \times Y$ ist genau dann (weg-)zusammenhängend, wenn X und Y (weg-)zusammenhängend sind.

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurde die Gerade mit Doppelpunkt als Beispiel für einen nicht-hausdorffschen Raum vorgestellt. Untersuchen Sie folgende ähnliche Räume auf die Hausdorff-eigenschaft:

(i) $\mathbb{R} + \mathbb{R} / \sim_1$, wobei $\sim_1$ definiert ist durch $(x, 0) \sim_1 (y, 1) :\Leftrightarrow x = y < 0$.

(ii) $\mathbb{R} + \mathbb{R} / \sim_2$, wobei $\sim_2$ definiert ist durch $(x, 0) \sim_2 (y, 1) :\Leftrightarrow x = y = 0$.

In beiden Fällen soll natürlich außerdem gelten, dass $(x, a) \sim (y, a) :\Leftrightarrow x = y$.

Aufgabe 4. In Übung 2, Aufgabe 5 wurde die sogenannte Zariski-Topologie auf K^n vorgestellt. Zeigen Sie, dass diese Topologie für die komplexen Zahlen $K = \mathbb{C}$ nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann zusammenhängend ist, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, wobei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie ausgestattet sei.