Übungszettel 3 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 29.10.2012 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Sei $(A = \{1,2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\})$, $(B = \{3\}, \{\emptyset, \{3\})$ topologische Räume. Was ist die topologische Summe $A + B$?

(ii) Sei $(X = \{1,2,3\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\})$ ein topologischer Raum, $A = \{1,2\} \subset X$ mit der Teilraumtopologie ausgestattet. Berechnen Sie X/A, d.h. geben Sie die offenen Mengen an.

(iii) Sei $X = \{1,2,3\}$ eine Menge, $(Y = \{1,2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\})$ ein topologischer Raum. Sei $f : X \to Y$ gegeben durch $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$. Bestimmen Sie die Initialtopologie auf X bzgl. $\{f\}$.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. (i) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie, dass $X \times Y$ metrisierbar ist.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Topologie auf $\mathbb{R}^2$, die in der Vorlesung 1.12 (iv) gegeben worden ist, metrisierbar ist. Zur Erinnerung:

$$\mathcal{O} = \{O \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) | \forall (x,y) \in O \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\} \subseteq O\}.$$

Aufgabe 3. Seien X, Y topologische Räume, $X + Y$ ihre topologische Summe. Nach Konstruktion ist $X \subseteq X + Y$. Zeigen Sie, dass die dadurch induzierte Teilraumtopologie auf X mit der ursprünglichen Topologie auf X übereinstimmt.

Aufgabe 4. Sei d eine Metrik auf X. Sei $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie versehen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für jedes $x_0 \in X$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}, f(x) := d(x, x_0)$ stetig.

(ii) Für jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq X$ ist die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := d(x, A) := \inf\{d(x,a) | a \in A\}$$

stetig und $g^{-1}(0) = \overline{A}$.

(iii) Für je zwei nicht-leere disjunkte und abgeschlossene Teilmengen A und B von X gibt es eine stetige Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ mit $h^{-1}(0) = A$ und $h^{-1}(1) = B$.

Aufgabe 5. Seien X und Y topologische Räume und sei $x \in X$: Beweisen oder widerlegen Sie: $X + Y/Y \cong X$ und $X \times Y/\{x\} \times Y \cong X$. (Hier ist für einen topologischen Raum A und eine Teilmenge B, der topologische Raum A/B definiert durch den Quotienten von A nach der Äquivalenzrelation auf A, die gegeben ist durch $z \sim z' :\Leftrightarrow z = z'$ oder $z, z' \in B$.)

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. Seien X und Y topologische Räume. Sei $X + Y$ ihre topologische Summe. Zeigen Sie, dass $X + Y$ das sogenannte Koprodukt von X und Y in der Kategorie der topologischen Räume ist, d.h. es existieren stetige Abbildungen $i : X \to X + Y$ und $j : Y \to X + Y$, so dass für jeden dritten topologischen Raum Z und alle Paare von stetigen Abbildungen $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ genau eine stetige Abbildung h existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X + Y \arrow[d, "h"] & Y \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

d.h. $hi = f$ und $hj = g$.
Betrachten Sie die analoge Situation für Vektorräume, indem Sie jeden topologischen Raum durch einen Vektorraum und jede stetige Abbildung durch eine lineare Abbildung ersetzen. Durch was müssen Sie die topologische Summe ersetzen, um die analoge Eigenschaft zu erhalten?