Übungszettel 2 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung ausnahmsweise in der Vorlesung, am Freitag, den 26.10.2012 ab. Ab dem dritten Übungsblatt erfolgt die Abgabe immer in Ihrer jeweiligen Übung am Mittwoch.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen der diskreten und der Klumpen-Topologie.

(ii) Bestimmen Sie für jede Teilmenge von X, wobei X die diskrete bzw. die Klumpen-Topologie trage, abgeschlossene Hülle, offenen Kern und Rand.

(iii) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Zur Definition eines topologischen Raumes gibt es mehrere alternative Definitionen. In der folgenden Aufgabe ist zu zeigen, dass die Kuratowskischen Hüllenaxiome äquivalent zu den in der Vorlesung angegebenen sind. (Die abgeschlossene Hülle erfüllt alle hier angegebenen Axiome.) Sei X eine Menge und $\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung ($\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge von X), die folgende Bedingungen erfüllt:

(H1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(H2) $A \subseteq \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$,

(H3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$,

(H4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ für alle $A, B \subseteq X$.

Zeigen Sie, dass X in diesem Fall ein topologischer Raum ist.
Hinweis: Erinnern Sie sich, dass die abgeschlossenen Mengen genau die Komplemente der offenen Mengen sind.

Aufgabe 3. Auf dem Raum $X = C([0,1])$ der stetigen, reellen Funktionen des Intervalls $[0,1]$ seien die beiden Metriken $d_\infty(f,g) := \sup_x |f(x) - g(x)|$ und $d_2(f,g) := \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $E : X \to \mathbb{R}$, $E(f) := f(0)$ zwar stetig bzgl. d_∞, aber unstetig bzgl. d_2 ist.

Aufgabe 4. Für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ sei $G(x)$ die Gerade durch den Ursprung und x, $G(0)$ sei $\{(0, \dots, 0)\}$. Beweisen Sie:

- $\{G(x) | x \in \mathbb{R}^n\}$ ist Basis einer Topologie. (Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt **Basis** der Topologie, wenn jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.)
- Diese Topologie ist nicht durch eine Metrik induziert.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome in n Variablen, aufgefasst als Abbildungen $K^n \to K$. Eine Menge A sei abgeschlossen, wenn sie algebraisch ist, d.h. es existiert eine Menge $P \subseteq \mathcal{P}$ von Polynomen, so dass $A = \{x \in K^n | f(x) = 0 \text{ für alle } f \in P\}$.

(i) Zeigen Sie, dass so eine Topologie auf K^n definiert wird. *Hinweis:* Sie können dies tun, indem Sie (ii) lösen.

(ii) Stellen Sie diese Topologie als Initialtopologie dar. (Seien Y_i topologische Räume. Eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X heißt **Initialtopologie** bzgl. einer Menge von Abbildungen $f_i : X \to Y_i$, wenn $\mathcal{O}$ in allen anderen Topologien auf X enthalten ist, so dass die f_i stetig sind.)

(iii) Mit welcher anderen Topologie auf K stimmt diese für $n = 1$ überein?