Übungszettel 14 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 28.01.2013 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Klassifizieren Sie alle Überlagerungen von $\mathbb{RP}^n$.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Untergruppen Normalteiler sind: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. $\{\lambda I_n | \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, für eine beliebige Gruppe G, das Zentrum $\{z \in G | zx = xz$ für alle $x \in G\}$ und die Kommutatoruntergruppe $\langle xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in G \rangle$. Die Gruppenstruktur sei jeweils die naheliegende.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche, d.h. des topologischen Raumes, der entsteht, wenn man $[0, 1]^2$ identifiziert anhand von $(1, y) \sim (0, y)$ und $(x, 1) \sim (1 - x, 0)$. (Hinweis: Für $k, \ell \in \mathbb{Z}$ betrachten Sie die Transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + k, (-1)^k y + \ell)$ um eine Gruppenstruktur auf $\mathbb{Z}^2$ und eine Wirkung dieser Gruppe zu definieren.)

Aufgabe 3. Sei $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, die Einpunktvereinigung. Beweisen Sie, dass X eine universelle Überlagerung besitzt, skizzieren Sie diese und alle zweiblättrigen Überlagerungen.

Aufgabe 4. Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e und $\pi : Y \to G$ eine Überlagerung. Zeigen Sie, dass für jedes $e' \in \pi^{-1}(e)$ auf Y eine Gruppenoperation definiert werden kann, so dass e' deren neutrales Element ist. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 5 von Zettel 10.)

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass eine Gruppe G mit Normalteilern H_1 und H_2 genau dann isomorph zu $H_1 \times H_2$ ist, wenn gilt:

(P1) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, und

(P2) $H_1 \cdot H_2 = G$.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. In dieser Aufgabe sollen Sie mit rein topologischen Mitteln eine rein algebraische Aussage beweisen (eine Strategie, die schon beim Fundamentalsatz der Algebra erfolgreich war), nämlich: Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist. Im Folgenden einige Hinweise:

(i) Finden Sie für eine gegebene freie Gruppe einen topologischen Raum, der diesen als Fundamentalgruppe hat. (Hinweis: Einpunktvereinigung, Seifert-van-Kampen)

(ii) Zeigen Sie, dass die Überlagerung eines Graphen (d.h. des Quotienten einer Vereinigung von Intervallen nach Identifikationen beliebig vieler Endpunkte) erneut ein Graph ist.

(iii) Folgern Sie mithilfe der Resultate der Vorlesung über Überlagerungen die Aussage.