Übungszettel 13 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 21.01.2013 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Sei $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Zeigen Sie, dass CX, der Kegel über X wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend ist.

(ii) Zeigen Sie, den Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes Polynom p mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat, indem Sie für ein Polynom p ohne Nullstellen mit Hilfe der Abbildung $\theta : \mathbb{S}^1 \times (0,1] \to \mathbb{S}^1 : (z,s) \mapsto \frac{p(\frac{1-s}{s}z)}{\|p(\frac{1-s}{s}z)\|}$ aus einem komplexen Polynom vom Grade n eine freie Homotopie von $z \mapsto z^n$ nach der konstanten Schleife konstruieren.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für einen lokal wegzusammenhängenden Raum X gilt: Jede Zusammenhangskomponente von X ist offen in X und jede zusammenhängende offene Teilmenge von X ist wegzusammenhängend.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass es genügt, Überlagerungen für die Zusammenhangskomponenten zu studieren. Sei B ein lokal wegzusammenhängender Raum. Dann ist $p : E \to B$ genau dann eine Überlagerung, wenn für jede Komponente B' von B die Einschränkung $p|_{p^{-1}(B')} : p^{-1}(B') \to B'$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 4. Für $k \in \mathbb{N}$ sei eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ gegeben durch $\varphi_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^k$. Definiere eine partielle Ordnung auf den φ_k durch $\varphi_k \leq \varphi_\ell$ genau dann, wenn es eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $\varphi_k \circ f = \varphi_\ell$ und $f(1) = 1$ gibt.

(i) Beschreiben Sie die Ordnung auf den φ_k. (Es gibt Teilpunkte, wenn Sie dies für $k \leq 6$ machen.)

(ii) Veranschaulichen Sie den Fall $\varphi_2 \not\leq \varphi_3$.

Aufgabe 5. Sei $H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial B_{1/n}((\frac{1}{n}, 0)) \subset \mathbb{R}^2$ (versehen mit der Unterraumtopologie bzgl. der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}^2$) der sogenannte **Hawaiianische Ohrring**. Entscheiden Sie, ob H bzw. CH, der Kegel über H, die folgenden topologischen Eigenschaften besitzen:

- wegzusammenhängend
- lokal wegzusammenhängend
- lokal einfach zusammenhängend, d.h. für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von x gibt es eine Umgebung $U \subseteq V$ von x, so dass jede geschlossene Schleife mit Basispunkt x in U nullhomotop ist.
- semi-lokal einfach zusammenhängend, d.h. für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von x, so dass jede geschlossene Schleife mit Basispunkt x in X nullhomotop ist.