Übungszettel 12 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 14.01.2013 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Machen Sie sich klar, dass die folgenden Abbildungen Gruppenwirkungen auf $\mathbb{R}^2$ definieren und bestimmen Sie jeweils, ob diese blätternd sind.

(a) $\mathbb{Z}$ durch $z \cdot (x, y) = (x + z, y)$.

(b) $\mathbb{Z}^2$ durch $(z_1, z_2) \cdot (x, y) = (x + z_1, y + z_2)$

(c) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ durch $A \cdot (z_1, z_2) = A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

(d) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ durch $A \cdot (z_1, z_2) = A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

(ii) In den Fällen, in denen die Gruppenwirkung in (i) blätternd ist, bestimmen Sie jeweils den Quotienten.

(iii) Bestimmen Sie die Ordnungen der Symmetriegruppen des Würfels und des Fußballs (aus 12 regelmäßigen Fünfecken und 20 regelmäßigen Sechsecken), d.h. der Gruppe der Isometrien, die das Objekt jeweils in sich selbst überführen.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Sphäre. Sei

$$G = \langle \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \rangle$$

die Gruppe der Drehungen um die Achse durch Nord- und Südpol. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^2/G$ und $[-1, 1]$ homöomorph sind.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{H} := \langle 1, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$ ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Definiere auf $\mathbb{H}$ ein Produkt durch die bilineare Fortsetzung von

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

(i) Zeigen Sie, dass dieses Produkt assoziativ, aber nicht kommutativ ist.

(ii) Für $q = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiere das Konjugierte durch $\overline{q} := a - bi - cj - dk$. Zeigen Sie, dass $q\overline{q} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist und genau dann verschwindet, wenn $q = 0$ ist. D.h. wir können eine Norm auf $\mathbb{H}$ definieren durch $|q| = \sqrt{q\overline{q}}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, \cdot)$ ein Schiefkörper ist, d.h. neben (i) dass es ein neutrales Element 1 gibt, so dass jedes Element invertierbar ist. Diesen Schiefkörper nennt man die Hamiltonschen Quaternionen.

Aufgabe 4. Rufen Sie sich aus der Linearen Algebra in Erinnerung, dass eine Matrix U unitär ist, wenn $U\overline{U}^T = \overline{U}^T U = 1$ ist. Sei $\mathrm{SU}(2) = \{U \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) | U \text{ unitär}, \det U = 1\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SU}(2) = \{\begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} | x\overline{x} + y\overline{y} = 1\}$ und dass diese Gruppe isomorph zur Gruppe der Einheitsquaternionen $\mathbb{H}_1$, d.h. der Quaternionen mit Norm 1 ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die topologische Gruppe $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$ auf $\mathbb{H}$ durch $(q_1, q_2) \cdot h = q_1 h q_2^{-1}$ operiert.

(iii) Zeigen Sie, dass die oben definierte Operation einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ definiert und bestimmen Sie Kern und Bild dieses Homomorphismus.

(iv) Zeigen Sie, dass der oben definierte Gruppenhomomorphismus eine Überlagerung ist.

Aufgabe 5. In dieser Aufgabe dürfen und sollen Sie die Ergebnisse aus der Linearen Algebra verwenden.

(i) Sei $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ die durch $O \cdot M := OMO^{-1}$ definierte Gruppenoperation, wobei $\mathrm{O}(n)$ die orthogonalen und $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ die symmetrischen reellen Matrizen bezeichne. Zeigen Sie, dass die Menge der Diagonalmatrizen jede Bahn schneidet.

(ii) Zeigen Sie dies ebenso für die analog definierte Gruppenoperation $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(n)$ der unitären Matrizen auf sich selbst.

(iii) Bestimmen Sie jeweils die Standgruppe einer Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen.