Übungszettel 11 - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Geben Sie die Lösungen zur schriftlichen Bearbeitung in ihrer Übung in der Woche vom 07.01.2013 ab.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^n$ eine Überlagerung ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{S}^3 \to L_{p,q}, x \mapsto [x]$ eine Überlagerung ist, wobei $L_{p,q}$ der auf Übungszettel 8 definierte Linsenraum ist.

Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für $n \neq 1$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für $n \neq 2$ ist.

Aufgabe 3. Seien $p : Y \to X$ und $\pi : Z \to Y$ Überlagerungen mit endlich vielen Blättern, d.h. $p^{-1}(U)$ ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen V_i, ebenso für π. Zeigen Sie, dass $p \circ \pi : Z \to X$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 4. (i) Beweisen Sie folgenden Satz: Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$. Sind U und V einfach zusammenhängend sowie $U \cap V$ wegzusammenhängend, so ist auch X einfach zusammenhängend. (*Hinweis:* Wählen Sie $x_0 \in U \cap V$. Für eine beliebige geschlossene Kurve $c : [0,1] \to X$ konstruieren Sie $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{2m} = 1$ mit $x_n := c(s_n)$ und $x_{2n} \in U \cap V$, $x_{4n+1} \in U \setminus V$, $x_{4n+3} \in V \setminus U$ sowie

$$c([s_{4n}, s_{4n+2}]) \subseteq U, \qquad c([s_{4n+2}, s_{4n+4}]) \subseteq V.$$

(evtl. U und V vertauschen). Mittels Wegen α_n von x_0 nach x_n, die ganz in U oder V bzw., für n gerade, ganz in $U \cap V$ verlaufen, zeige man, dass c homotop mit festen Endpunkten zur konstanten Abbildung $c_0 \equiv x_0$ ist.

(ii) Folgern Sie aus dem ersten Aufgabenteil die Ihnen schon bekannte Aussage, dass $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$ für alle $n > 1$.

Aufgabe 5. In der Vorlesung wurde der Begriff einer **Kategorie** verwendet: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (wir lassen die Mengentheorie hier beiseite und verstehen darunter irgendeine Zusammenfassung von Dingen, z.B. gibt es die Klasse aller Mengen) und für je zwei Objekte X und Y eine Menge von Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sowie für je drei Objekte X, Y, Z eine Abbildung $- \circ - : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$, sodass folgende Axiome erfüllt sind:

(C1) Für Objekte W, X, Y, Z und Morphismen $f : W \to X$, $g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(C2) Für jedes Objekt X existiert ein Morphismus 1_X, so dass für alle $f : W \to X$ und $g : X \to Y$ gilt $1_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g$.

Ein einfaches Beispiel ist die Kategorie aller Mengen, d.h. die Klasse ist die Klasse aller Mengen, und für je zwei Mengen A und B ist die Menge der Morphismen von A nach B die Menge der Funktionen von A nach B. Die Abbildung $- \circ -$ ist einfach die gewöhnliche Hintereinanderausführung von Abbildungen. In der Vorlesung wurde außerdem erwähnt, dass die topologischen Räume mit stetigen Abbildungen eine Kategorie bilden.

(i) Geben Sie weitere (mindestens drei) Beispiele für Kategorien an, die Sie bereits in ihrem Studium kennen gelernt haben (ohne Beweis).

(ii) Zeigen Sie, dass folgende Konstruktion eine Kategorie bildet, die sogenannte Homotopiekategorie der punktierten topologischen Räume hTop_*: Objekte sind punktierte topologische Räume (X, x_0) und die Menge der Morphismen von (X, x_0) nach (Y, y_0) ist die Menge der Äquivalenzklassen von punktierten Abbildungen bzgl. der Äquivalenzrelation punktierte Homotopie. (*Hinweis:* Sie dürfen die Ergebnisse der Vorlesung benutzen.)

Auch zwischen verschiedenen Kategorien gibt es "Abbildungen", die sogenannten **Funktoren**. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, dann ist ein (kovarianter) Funktor F eine Zuordnung, die jedem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \mathcal{D}$ zuordnet, und jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ und zwar so, dass $F(1_X) = 1_{F(X)}$ und $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Als Beispiel haben Sie in der Vorlesung gesehen, dass π_1 einen Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen bildet.

(iii) Zeigen Sie, dass π_1 auch einen Funktor von hTop_* in die Kategorie der Gruppen bildet.

(iv) Früher im Semester haben Sie für einen topologischen Raum X, den Kegel über X, CX kennen gelernt. Definieren Sie "in sinnvoller Weise" für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung $Cf : CX \to CY$, so dass C zu einem Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der topologischen Räume wird.

Knobelaufgabe für alle, denen die anderen Aufgaben zu langweilig sind

Diese Aufgabe geht nicht in die Wertung ein und wird in der Regel nicht in der Übung besprochen. Wenn Sie Fragen zur Lösung haben, fragen Sie Ihren Tutor oder kommen Sie montags 13-14 Uhr in Raum 7.561.

Aufgabe 6. In dieser Aufgabe geht es erneut um Kategorien und Funktoren. Eine Kategorie heiße **klein**, wenn die Klasse der Objekte eine Menge ist. Sei **Cat** die Kategorie aller kleinen Kategorien. Morphismen seien in ihr durch Funktoren gegeben. Wir definieren einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in **Cat** dadurch, dass wir X den sogenannten Fundamentalgroupoid $\Pi_1(X)$ zuordnet. Das ist die Kategorie, die als Objekte die Punkte von X hat und ein Morphismus von x nach y ist eine Homotopieklassen von Wegen von x nach y.

(i) Zeigen Sie, dass dies einen Funktor definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass der Fundamentalgroupoid zu X tatsächlich ein **Groupoid** ist, d.h. alle Morphismen in $\Pi_1(X)$ sind invertierbar. (Analog zu einer Gruppe, wo alle Elemente invertierbar sind.)

Zu Weihnachten gibt es ausnahmsweise noch eine zweite Knobelaufgabe geschenkt:

Aufgabe 7. Seien E und B topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\xi : E \to B$ habe die **Homotopiehochhebungseigenschaft** (HHE) bezüglich eines Raumes X, wenn es zu jeder Homotopie $X : X \times I \to B$ und vorgegebener Hochhebung $\hat{H}_0 : X \to E$ von H_0 eine Hochhebung $\hat{H} : X \times I \to E$ der ganzen Homotopie gibt.
Nun habe $\xi : E \to B$ die HHE für einen Punkt und für $I = [0, 1]$. Man wähle $b \in B$ und $e \in \xi^{-1}(B) =: F$ und bezeichne mit $\iota : F \to E$ die Inklusion. Nun definiere man $\partial : \pi_1(B, b) \to \pi_0(F)$ (die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von F) durch $\partial([w]) := [\tilde{w}(1)]$, wobei $\tilde{w}$ eine Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = e$ ist. Man zeige:

(i) ∂ ist wohldefiniert.

(ii) In der folgenden Reihe von Abbildungen gilt jeweils, dass der Kern einer Abbildung gleich dem Bild der vorherigen Abbildung ist. Man sagt, dass die Sequenz **exakt** ist:

$$\pi_1(F, e) \overset{\pi_1(\iota)}{\to} \pi_1(E, e) \overset{\pi_1(\xi)}{\to} \pi_1(B, b) \overset{\partial}{\to} \pi_0(F) \overset{\pi_0(\iota)}{\to} \pi_0(E).$$

Hierbei sei $\pi_0(-)$ jeweils die Menge der Wegzusammenhangskomponenten. Dies ist durch die obige Wahl des Punktes e eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, der Wegzusammenhangskomponente von e. Unter dem Kern einer Abbildung zwischen punktierten Mengen verstehe man dann das Urbild des ausgezeichneten Punktes.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr.