Übungszettel 1 - Topologie

Stuttgart - WS 2012/13

Die Aufgaben dieser Serie werden in den ersten Übungen in der zweiten Semesterwoche besprochen. Ab der zweiten Serie sind die Aufgaben dann jeweils in der Übung abzugeben. Der Übungszettel wird jeweils in der Vorwoche bis spätestens Freitag vor der Vorlesung online sein. Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie 30% der Punkte aus den Übungen ab Zettel 2 erreichen und zusätzlich zweimal vorgerechnet haben. Es ist erlaubt in kleinen Gruppen zusammen zu arbeiten, die Lösungen sollen aber getrennt abgegeben werden. Zur Erleichterung der Arbeit für die Übungsleiter geben Sie bitte auf jeder Serie an, mit wem Sie zusammengearbeitet haben.

Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Aufgabe bitte bis zur ersten Übung. Diese wird nur mündlich kurz besprochen.

Aufgabe 1. (i) Welche der folgenden Teilmengen der Potenzmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$ bilden Topologien:

- $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

(ii) Wie viele Topologien gibt es auf einer null-, ein- bzw. zwei-punktigen Menge.

(iii) Beweisen oder widerlegen Sie: Abzählbare Schnitte offener Mengen sind offen.

Präsenzaufgaben

Folgende Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde gelöst:

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Definiere

$$d_{x_0}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ d(x, x_0) + d(x_0, y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Beweisen Sie, dass d_{x_0} eine Metrik ist.

(ii) Sei d die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$. Ist die Topologie, die auf $\mathbb{R}^2$ von $d_{(0,0)}$ induziert wird gröber, feiner, gleich oder unvergleichbar der von d induzierten.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Teilmengen der Potenzmenge von $\mathbb{R}$ Topologien bilden:

(a) $\mathcal{O}_{cof} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$

(b) $\tilde{\mathcal{O}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ unendlich}\} \cup \{\mathbb{R}\}$

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Zeigen Sie: x ist genau dann ein Randpunkt von A , wenn jede Umgebung von x nichtleeren Schnitt mit A und $X \setminus A$ hat.

(ii) Gilt $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$ bzw. $\overline{\partial A} = \partial A$? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

Aufgabe 5. Der folgende Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen mithilfe der Topologie ist aus dem Buch der Beweise von Aigner und Ziegler.

Sei $N_{a,b} := \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Und sei eine Menge $O \subseteq \mathbb{Z}$ offen, falls O leer ist oder für alle $a \in O$ ein $b > 0$ existiert, so dass $N_{a,b} \subseteq O$. Beweisen Sie folgende Aussagen, um die Unendlichkeit der Primzahlen zu zeigen:

- (i) Die als offen definierten Mengen bilden eine Topologie auf $\mathbb{Z}$.
- (ii) Jede nicht-leere offene Menge ist unendlich.
- (iii) $N_{a,b}$ ist für alle a und b abgeschlossen.
- (iv) $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen sei.
- (v) Die vorangegangenen Aussagen widersprechen der Endlichkeit der Menge der Primzahlen.