Probeklausur - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Einige Vorbemerkungen: Begründen Sie ihre Aussagen genau, die meisten Punkte gibt es für die Begründung, nicht für das Resultat. Sie dürfen Sätze aus der Vorlesung oder Resultate der Übung zitieren (außer die Aufgabe fragt explizit danach). Das Hinschreiben der *relevanten* Definitionen oder eine anschauliche Begründung kann Teilpunkte geben.

Zu Ihrer eigenen Einschätzung: Es gibt insgesamt 35 Punkte und ungefähr die folgende Verteilung von Punkten und Noten ist zugrunde gelegt:

1	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0
30.5	29	27.5	26	24.5	23	21.5	20	18.5	17

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Sei $X = \{a, b, c\}$. Gibt es Topologien auf X mit drei bzw. sieben Elementen? Wenn ja, wie viele solche Topologien gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. (a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn die Urbilder einer Subbasis von Y offen sind.

(b) *(2 Punkte)* Sei X ein nichtleerer topologischer Raum, so dass es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen Homöomorphismus $f : X \to X$ mit $f(x) = y$ gibt. Zeigen Sie, dass X genau dann die diskrete Topologie trägt, wenn es eine einelementige offene Teilmenge von X gibt.

Aufgabe 3. (a) *(3 Punkte)* Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen ist, d.h. dass Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

(b) *(1 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 4. (a) *(2 Punkte)* Definieren Sie die Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang.

(b) *(4 Punkte)* Welche der folgenden topologischen Räume sind zueinander homotopieäquivalent? Hierbei bezeichne $\{\text{pt.}\}$ den einelementigen topologischen Raum.

$$\mathbb{S}^1, \{\text{pt.}\}, \mathbb{R}.$$

Begründen Sie jeweils ihre Antwort, d.h. geben Sie für nicht homotopieäquivalente Räume ein Argument warum diese es nicht sind und geben Sie für homotopieäquivalente Räume eine Homotopieäquivalenz an.

Aufgabe 5. (a) *(2 Punkte)* Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass $\pi_1(f)$ ein Isomorphismus ist.

(b) *(1 Punkt)* Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass für eine injektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ der induzierte Homomorphismus $\pi_1(f)$ nicht notwendig injektiv ist.

(c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass ein Raum X genau dann zusammenziehbar ist, wenn id_X nullhomotop ist.

Aufgabe 6. (a) *(2 Punkte)* Erläutern Sie, warum die Fundamentalgruppe über Homotopieklassen von Wegen definiert wird, d.h. warum eine Definition über geschlossene Wege keine Gruppenstruktur definiert.

(b) *(3 Punkte)* Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Seifert-van-Kampen, dass die Sphäre $\mathbb{S}^2$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 7. (a) *(4 Punkte)* Seien $p_1 : E_1 \to B_1$ und $p_2 : E_2 \to B_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie, dass $p : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2, (e_1, e_2) \mapsto (p_1(e_1), p_2(e_2))$ eine Überlagerung ist.

(b) *(2 Punkte)* Ist die Abbildung $p : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto |x|$ eine Überlagerung?