Probeklausur - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Einige Vorbemerkungen: Begründen Sie ihre Aussagen genau, die meisten Punkte gibt es für die Begründung, nicht für das Resultat. Sie dürfen Sätze aus der Vorlesung oder Resultate der Übung zitieren (außer die Aufgabe fragt explizit danach). Das Hinschreiben der *relevanten* Definitionen oder eine anschauliche Begründung kann Teilpunkte geben.

Zu Ihrer eigenen Einschätzung: Es gibt insgesamt 35 Punkte und ungefähr die folgende Verteilung von Punkten und Noten ist zugrunde gelegt:

1	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0
30.5	29	27.5	26	24.5	23	21.5	20	18.5	17

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Sei $X = \{a, b, c\}$. Gibt es Topologien auf X mit drei bzw. sieben Elementen? Wenn ja, wie viele solche Topologien gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 1. (a) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X mit drei Elementen. Nach Definition des topologischen Raumes gilt immer, dass $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. *(1 Punkt)* Da $\mathcal{T}$ drei Elemente haben soll, gibt es nur noch ein weiteres Element in $\mathcal{T}$. Die noch vorhandenen Elemente der Potenzmenge sind $2^{|X|} - 2 = 6$. *(1 Punkt).* Jede dieser Mengen ergänzt $\mathcal{T}$ zu einer Topologie, denn es gilt für jede dieser Mengen A: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap X = A$, $A \cup \emptyset = A$ und $A \cup X = X$. *(1 Punkt)*

(b) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X mit sieben Elementen. Da die Potenzmenge acht Elemente hat, sind also alle bis auf ein Element darin. Dieses Element kann nicht $\emptyset$ oder X sein (s.o.). Angenommen es ist einelementig, o.B.d.A. $\{a\}$. Dann gilt aber $\{a, b\}$ und $\{a, c\} \in \mathcal{T}$. Damit ist aber nach den Axiomen der Topologie auch $\{a\} = \{a, b\} \cap \{a, c\} \in \mathcal{T}$, ein Widerspruch. Angenommen die weggelassene Menge ist zweielementig, o.B.d.A. $\{b, c\}$. Dann sind aber $\{b\}, \{c\} \in \mathcal{T}$. Also $\{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \mathcal{T}$, ein Widerspruch. *(1 Punkt) Bemerkung: Es gibt natürlich auch die entsprechenden Punkte, wenn man die Axiome für die Topologie erst im zweiten Teil verwendet und den ersten Teil weglässt.*

Aufgabe 2. (a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn die Urbilder einer Subbasis von Y offen sind.

(b) *(2 Punkte)* Sei X ein nichtleerer topologischer Raum, so dass es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen Homöomorphismus $f : X \to X$ mit $f(x) = y$ gibt. Zeigen Sie, dass X genau dann die diskrete Topologie trägt, wenn es eine einelementige offene Teilmenge von X gibt.

Lösung 2. (a) Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann ist eine Subbasis $\mathcal{S}$ von $(Y, \mathcal{T})$ definiert als eine Teilmenge von $\mathcal{T}$, so dass jedes $O \in \mathcal{T}$ geschrieben werden kann als $O = \bigcup_{k \in I} \bigcap_{j \in J_k} S_j$ mit $S_j \in \mathcal{S}$, einer beliebigen Indexmenge I und endlichen Indexmengen J_k für jedes k. *(1 Punkt)*

Sei $f : X \to Y$, wobei $(X, \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum sei. Es gilt, dass f genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}'$ für jedes $O \in \mathcal{T}$ ist. Nun kann O geschrieben werden als $O = \bigcup_{k \in I} \bigcap_{j \in J_k} S_j$ nach Definition der Subbasis und es gilt:

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k \in I} \bigcap_{j \in J_k} f^{-1}(S_j).$$

Da nach Voraussetzung alle $f^{-1}(S_j)$ offen sind und nach Definition einer Topologie endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen wieder offene Mengen erzeugen, gilt also $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}'$. *(1 Punkt)* Die andere Richtung ist offensichtlich, da die Elemente einer Subbasis insbesondere offen sind.

(b) Angenommen X trage die diskrete Topologie. Dann (da X nichtleer ist) ist nach Definition jede einelementige Teilmenge offen und insbesondere gibt es eine. *(1 Punkt)*
Sei nun umgekehrt angenommen, dass es eine einelementige offene Menge $\{y\}$ gibt. Nach Voraussetzung gibt es für jeden Punkt $x \in X$ einen Homöomorphismus $f : X \to X$ mit $f(x) = y$. Damit gilt aber, da f als Homöomorphismus insbesondere bijektiv ist, $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Damit ist, da f stetig ist, also auch $\{x\}$ offen, also jede einelementige Teilmenge offen. Das ist genau die Definition der diskreten Topologie. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3. (a) *(3 Punkte)* Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen ist, d.h. dass Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

(b) *(1 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

Lösung 3. (a) Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist nach Vorlesung (abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt) also A kompakt. *(1 Punkt)* Damit ist $f(A)$ also kompakt nach Vorlesung (Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.). *(1 Punkt)* Demnach ist $f(A)$ auch abgeschlossen nach Vorlesung (kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen sind abgeschlossen). *(1 Punkt)*

(b) *Jede der folgenden Argumentationen greift und gibt 1 Punkt.*

- Die Überdeckung $\{(n - \frac{3}{4}, n + \frac{3}{4}) | n \in \mathbb{N}\}$ hat keine endliche Teilüberdeckung, denn n ist nur in $(n - \frac{3}{4}, n + \frac{3}{4})$ enthalten.
- Mithilfe von (a): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ ist eine stetige Abbildung in einen Hausdorffraum und das Bild der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}$ ist $(0, \infty)$ und somit nicht abgeschlossen.
- $\mathbb{R}$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Also ist kompakt dasselbe wie folgenkompakt. Allerdings ist $x_n = n$ eine Folge ohne konvergente Teilfolge.

Aufgabe 4. (a) *(2 Punkte)* Definieren Sie die Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang.

(b) *(4 Punkte)* Welche der folgenden topologischen Räume sind zueinander homotopieäquivalent? Hierbei bezeichne $\{\text{pt.}\}$ den einelementigen topologischen Raum.

$$\mathbb{S}^1, \{\text{pt.}\}, \mathbb{R}.$$

Begründen Sie jeweils ihre Antwort, d.h. geben Sie für nicht homotopieäquivalente Räume ein Argument warum diese es nicht sind und geben Sie für homotopieäquivalente Räume eine Homotopieäquivalenz an.

Lösung 4. (a) Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn $X = U \cup V$ mit U, V offen und $U \cap V = \emptyset$ für alle U, V impliziert, dass $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.*(1 Punkt)*
Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \to X$ gibt mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$. *(1 Punkt)*

(b) Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen *(1 Punkt)*. Es gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\{\text{pt.}\}) = \pi_1(\mathbb{R}) = \{1\}$. Somit kann $\mathbb{S}^1$ nicht homotopieäquivalent zu einem der anderen Räume sein. *(1 Punkt)*
$\{\text{pt.}\}$ und $\mathbb{R}$ sind aber homotopieäquivalent. Wir geben die Homotopieäquivalenzen an: $f : \{\text{pt.}\} \to \mathbb{R}, \text{pt.} \mapsto 0$, $g : \mathbb{R} \to \{\text{pt.}\}, x \mapsto \text{pt.}$. Dann gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\{\text{pt.}\}}$ und $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ ist homotop zur Identität mittels der Homotopie $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}, H(x, t) = tx$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 5. (a) *(2 Punkte)* Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass $\pi_1(f)$ ein Isomorphismus ist.

(b) *(1 Punkt)* Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass für eine injektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ der induzierte Homomorphismus $\pi_1(f)$ nicht notwendig injektiv ist.

(c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass ein Raum X genau dann zusammenziehbar ist, wenn id_X nullhomotop ist.

Lösung 5. (a) f ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$. *(1 Punkt).* Damit gilt aber $\mathrm{id} = \pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$, da π_1 ein Funktor ist (und umgekehrt für $g \circ f$. *(1 Punkt).* Damit ist $\pi_1(f)$ invertierbar mit Umkehrabbildung $\pi_1(g)$, also ein Isomorphismus. *(1 Punkt)*

(b) Sei z.B. $X = \mathbb{S}^1$ und $Y = \mathbb{R}$. Dann gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathbb{R}) = \{1\}$. Es gibt aber offensichtlich keine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \{1\}$. *(1 Punkt)*

(c) Ein Raum ist zusammenziehbar, wenn es f, g gibt mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}$. *(1 Punkt)* Ist also X zusammenziehbar, so existiert insbesondere $H : X \times [0, 1] \to X$ mit $H(x, 0) = f \circ g(x) =: x_0$ und $H(x, 1) = x$. Damit ist insbesondere id_X nullhomotop (d.h. nach Definition homotop zu einer konstanten Abbildung) *(1 Punkt).*
Angenommen umgekehrt id_X ist nullhomotop, d.h. es existiert $H : X \times I \to X$ mit $H(x, 0) = x_0$ und $H(x, 1) = x$. Definiere $f : \{\text{pt.}\} \to X, \text{pt.} \mapsto x_0$ und $g : X \to \{\text{pt.}\}, x \mapsto \text{pt.}$. Dann gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\{\text{pt.}\}}$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_X$ vermöge H. *(1 Punkt)*

Aufgabe 6. (a) *(2 Punkte)* Erläutern Sie, warum die Fundamentalgruppe über Homotopieklassen von Wegen definiert wird, d.h. warum eine Definition über geschlossene Wege keine Gruppenstruktur definiert.

(b) *(3 Punkte)* Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Seifert-van-Kampen, dass die Sphäre $\mathbb{S}^2$ einfach zusammenhängend ist.

Lösung 6. (a) Wird $\pi_1(X, x_0)$ nur über Wege definiert, so gilt z.B., dass für einen nicht-konstanten Weg ω kein Weg ω' existiert, so dass $\omega * \omega' = c_{x_0}$ ist, denn die linke Seite wird auf jeden Fall zuerst ω gehen, während die rechte Seite konstant in x_0 bleibt. *(2 Punkte) Bemerkung: Man kann auch z.B. auch über die Assoziatitivität oder das neutrale Element argumentieren.*

(b) Sei $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, wobei N bzw. S den Nord- bzw. Südpol der Sphäre bezeichnen. Beide Räume sind über die stereographe Projektion homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, also insbesondere einfach zusammenhängend. *(1 Punkt)* Es ist $U \cap V$ wegzusammenhängend, denn es ist über stereographische Projektion homöomorph zu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. *(1 Punkt).* Der Satz von Seifert und van Kampen sagt nun, dass $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$, wobei N der Normalteiler ist, der von Elementen der Form $[\omega]_U \cdot [\omega]_V$ mit $\omega \in \Omega(U \cap V, x_0)$ gilt. Da aber sowohl U als auch V einfach zusammenhängend sind, d.h. triviale Fundamentalgruppen haben, ist auch deren freies Produkt trivial, also auch ein beliebiger Quotient. *(1 Punkt)*

Aufgabe 7. (a) *(4 Punkte)* Seien $p_1 : E_1 \to B_1$ und $p_2 : E_2 \to B_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie, dass $p : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2, (e_1, e_2) \mapsto (p_1(e_1), p_2(e_2))$ eine Überlagerung ist.

(b) *(2 Punkte)* Ist die Abbildung $p : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto |x|$ eine Überlagerung?

Lösung 7. (a) Offensichtlich ist (p_1, p_2) stetig und surjektiv. *(1 Punkt).* Zusätzlich muss eine Überlagerung p die Eigenschaft haben, dass für alle x eine Umgebung $U(x)$ existiert, so dass Umgebungen V_α von allen Urbildern von x existieren, so dass $p^{-1}(U(x)) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ und $p : V_\alpha \to U(x)$ ein Homöomorphismus ist. Sei nun $z = (x, y)$. Definiere $U(z) = U(x) \times U(y)$. Dann ist dies eine Umgebung und es gilt $p^{-1}(U(x) \times U(y)) = p_1^{-1}(U(x)) \times p_2^{-1}(U(y)) = \bigcup_{\alpha,\beta} V_\alpha \times W_\beta$, wobei V_α die entsprechenden Umgebungen für p_1 und W_β die entsprechenden Umgebungen für p_2 seien. *(2 Punkte).* Ebenso ist $V_\alpha \times W_\beta \to U(x) \times U(y)$ ein Homöomorphismus, denn ist f_α eine entsprechende stetige Umkehrabbildung und g_β eine entsprechende, so ist (f_α, g_β) invers zu p auf der entsprechenden Umgebung. *(1 Punkt).*

(b) Die angegebene Abbildung ist keine Überlagerung. Denn sei U eine Umgebung von 0 in $[0, \infty)$. Da sich Homöomorphismen auf Unterräume einschränken und $B_\varepsilon(0) \cap [0, \infty) \subseteq U$ (da U Umgebung) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $U = B_\varepsilon(0) \cap [0, \infty)$. Nun ist aber $B_\varepsilon(0)$

zusammenhängend, also gibt es nur ein V_α *(1 Punkt)* und $p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(0) \cap [0, \infty)$. Dies kann aber kein Homöomorphismus sein, denn man kann den Nullpunkt im Bild herausnehmen und hat immer noch einen zusammenhängenden Raum, aber im Urbild wird der Raum durch Herausnahme eines Punktes unzusammenhängend. *(1 Punkt)*