Klausur - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Einige Vorbemerkungen: Begründen Sie ihre Aussagen genau, die meisten Punkte gibt es für die Begründung, nicht für das Resultat. Sie dürfen Sätze aus der Vorlesung oder Resultate der Übung zitieren (außer die Aufgabe fragt explizit danach). Das Hinschreiben der *relevanten* Definitionen oder eine anschauliche Begründung kann Teilpunkte geben.

Aufgabe 1. (a) *(3 Punkte)* Geben Sie alle Topologien auf $X = \{a, b\}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) *(3 Punkte)* Wie viele gibt es bis auf Homöomorphie, d.h. welche der in (a) bestimmten topologischen Räume sind homöomorph. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) *(2 Punkte)* Geben Sie einen topologischen Raum mit mehr als einem Element an, so dass alle Folgen in diesem Raum konvergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Lösung 1. (a) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Dann gilt $X \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \in \mathcal{T}$. *(1 Punkt).* Außer diesem Element gibt es noch zwei weitere, denn $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} = 4$. Man kann jegliche Kombination aus Mengen daraus wählen, um eine Topologie auf X zu erhalten. Es gibt die folgenden: $\mathcal{T}_a := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \mathcal{T}_b := \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \mathcal{T}_t := \{\emptyset, \{a, b\}\}, \mathcal{T}_d := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Denn es gilt z.B. $\{a\} \cap \emptyset = \emptyset, \{a\} \cup \emptyset = \{a\}, \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}, \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}, \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}, \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Analog für $\{b\}$. *(1 Punkt)*

(b) Wir behaupten, dass von den oben genannten Topologien $\mathcal{T}_a$ und $\mathcal{T}_b$ homöomorph sind, und die anderen beiden Topologien nicht zueinander und jeweils nicht zu $\mathcal{T}_a$. Ein Homöomorphismus $f : \mathcal{T}_a \to \mathcal{T}_b$ ist gegeben durch $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Die Umkehrabbildung ist durch die gleiche Vorschrift gegeben. Es gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(X) = X$ und $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$ und analog für die Umkehrabbildung, also ist f ein Homöomorphismus. *(1 Punkt)*
Angenommen es gäbe einen Homöomorphismus $f : \mathcal{T}_t \to \mathcal{T}_a$. Dann müsste $f^{-1}(\{a\})$ offen sein, da f stetig und einelementig, da f bijektiv. Dies ist ein Widerspruch. Einen analogen erhält man für $\mathcal{T}_b$ und $\mathcal{T}_d$. *(1 Punkt)*
Es ist noch zu zeigen, dass $\mathcal{T}_d$ nicht homöomorph zu $\mathcal{T}_a$ ist. Dazu sei ein Homöomorphismus $f : \mathcal{T}_a \to \mathcal{T}_d$ angenommen. Dann müssen $f^{-1}(\{a\})$ und $f^{-1}(\{b\})$ beide offen, einelementig und verschieden sein. Ein Widerspruch. *(1 Punkt)*

(c) $\mathcal{T}_a$ ist ein Beispiel. Jede Folge konvergiert gegen b, denn in jeder Umgebung von b ($\{a, b\}$ ist die einzige) liegt (schließlich) jedes Folgenglied. *(2 Punkte)* **Alternative Antwort:** Jede beliebige Menge mit mehr als einem Element mit der Klumpentopologie ist ein Beispiel, denn die einzige Umgebung eines jeden Punktes ist der gesamte Raum. Also konvergiert jede Folge sogar gegen jeden Punkt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2. (a) *(4 Punkte)* Seien G, H topologische Gruppen. Zeigen Sie, dass ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ genau dann stetig ist, wenn er stetig beim neutralen Element $e \in G$ ist.

(b) *(2 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum, so dass jede stetige Abbildung $f : X \to X$ einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

Lösung 2. (a) Nach Vorlesung ist eine Abbildung f genau dann stetig, wenn sie stetig bei jedem Element ist, damit folgt sofort, dass sie insbesondere stetig bei e ist. *(1 Punkt).* Sei umgekehrt angenommen, dass f stetig bei e ist. Nach Definition gilt dann für jede Umgebung U von $f(e) = e$, dass $f^{-1}(U) = V$ eine Umgebung von e ist. *(1 Punkt)* Sei nun $U(g)$ eine Umgebung von $f(g)$. Wir behaupten, dass $f(g^{-1})U(g)$ eine Umgebung von e ist. Dies folgt, da $\lambda_{f(g^{-1})}$, die Linksmultiplikation mit $f(g^{-1})$, eine stetige Abbildung ist als Verkettung $H \to \{f(g^{-1})\} \times H \to H$, wobei die erste Abbildung $h \mapsto (f(g^{-1}), h)$ ist und die zweite die Multiplikationsabbildung. Die Abbildung $\lambda_{f(g^{-1})}$ hat eine Umkehrabbildung, die Linksmultiplikation $\lambda_{f(g)}$ mit $f(g)$, die ebenfalls stetig ist, $\lambda_{f(g^{-1})}$ ist also ein Homöomorphismus und bildet insbesondere Umgebungen auf Umgebungen ab. *(1 Punkt)* Nun ist $f^{-1}(U(g)) = gf^{-1}(f(g)^{-1}(U(g)) = gf^{-1}(f(g^{-1})U(g))$ und wir haben zuvor gezeigt, dass $f(g^{-1})U(g)$ eine Umgebung von e ist. Da f in e stetig ist, ist also $f^{-1}(f(g^{-1})U(g))$ eine Umgebung von e. Also ist mit derselben Argumentation wie zuvor $gf^{-1}(f(g^{-1})U(g))$ eine Umgebung von g. *(1 Punkt)*

(b) Es gilt, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn $f : X \to \{0, 1\}$ stetig existiert, wobei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie ausgestattet sei. *(1 Punkt)* Wir nehmen an, dass X unzusammenhängend wäre. Dann gäbe es also ein solches f. Wähle nun Urbilder x_0, x_1 von 0 und 1 und definiere $g : \{0, 1\} \to X$ durch $g(0) = x_1$ und $g(1) = x_0$. Dann gilt, dass $g \circ f : X \to X$ keinen Fixpunkt haben kann, denn ein solcher läge in einer der beiden Urbilder X_0 oder X_1, aber deren Schnitt ist leer. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum, $A, B \subseteq X$ kompakte Teilräume. Zeigen Sie:

(a) *(2 Punkte)* $A \cup B$ ist kompakt.

(b) *(2 Punkte)* Ist X hausdorffsch, so ist auch $A \cap B$ kompakt.

Lösung 3. (a) Sei X_α eine offene Überdeckung von $A \cup B$. Dann ist nach Definition der Unterraumtopologie $X_\alpha \cap A$ eine offene Überdeckung von A. Damit existiert eine endliche Teilüberdeckung indiziert durch $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$. Ebenso für B durch $\alpha_i, i = n + 1, \ldots, m$. Dann ist aber $X_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, m$ eine endliche Teilüberdeckung von $A \cup B$. *(2 Punkte)*

(b) Sei X hausdorffsch und seien A, B kompakt. Damit sind A und B abgeschlossen (nach Vorlesung: kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen sind abgeschlossen.) *(1 Punkt)* Damit ist $A \cap B$ nach Definition der Topologie abgeschlossen. Damit ist $A \cap B$ als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes wieder kompakt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 4. (a) *(2 Punkte)* Definieren Sie den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit.

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Einbettung $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz ist.

(c) *(2 Punkte)* Warum ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x \mapsto (x, 1)$ keine Homotopieäquivalenz?

Lösung 4. (a) Eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein hausdorffscher Topologischer Raum mit abzählbarer Basis, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Das Homotopieinverse ist $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ *(1 Punkt)*. Es gilt $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $i \circ r$ ist homotop zur Identität mittels $H(x, t) = (1 - t)\frac{x}{\|x\|} + tx$. *(1 Punkt)*

(c) Eine Homotopieäquivalenz induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen. *(1 Punkt)*. Es gilt aber $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathbb{R}) = \{1\}$. *(1 Punkt)* Also kann dies keine Homotopieäquivalenz sein.

Aufgabe 5. *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$ gibt.

Lösung 5. Angenommen es existierte ein solches r. Dann gälte

$$[c_{r(x_0)}] = \pi_1(r)([c_{x_0}]) = \pi_1(r)([\mathrm{id}_{\mathbb{D}^2}]) = [\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}],$$

wobei c_{x_0} den konstanten Weg in x_0 bezeichne *(1 Punkt)*, denn $\mathbb{D}^2$ ist zusammenziehbar, deshalb ist der konstante Weg homotop zur Identität. Damit wäre also auch $\mathbb{S}^1$ zusammenziehbar, was es nicht ist.*(1 Punkt)*

Aufgabe 6. (a) *(2 Punkte)* Erläutern Sie, inwiefern die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes von der Wahl des Basispunktes abhängt.

(b) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des Möbiusbandes, d.h. des topologischen Raumes, der gegeben ist durch den Quotienten von $\mathbb{R}^2$ nach der Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}$, die gegeben ist durch $t \cdot (x, y) = (x + t, (-1)^t y)$.

Lösung 6. (a) Seien x_0, x_1 zwei Basispunkte. Nach Vorlesung gilt für einen gewählten Weg δ von x_1 nach x_0, dass $\pi_1(X, x_1) = [\delta^{-1}]\pi_1(X, x_0)[\delta]$. *(1 Punkt)* Demnach ist die Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Basispunktes in einer Wegzusammenhangskomponente. *(1 Punkt)*

(b) Die Gruppenwirkung ist blätternd, denn $t \cdot B_{1/2}(x, y) \cap B_{1/2}(x, y) = \emptyset$ *(1 Punkt)* und $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Deshalb gilt nach Vorlesung $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z})$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 7. (a) *(3 Punkte)* Seien $p_1 : E_1 \to B_1$ und $p_2 : E_2 \to B_2$ Überlagerungen. Sei $p : E_1 + E_2 \to B_1 + B_2$ definiert durch $p((e_1, 0)) = p_1(e_1)$ für $e_1 \in E_1$ und $p((e_2, 1)) = p_2(e_2)$ für $e_2 \in E_2$. Zeigen Sie, dass p eine Überlagerung ist.

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass es keine Überlagerung $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt.

Lösung 7. (a) Dass die definierte Abbildung surjektiv und stetig ist, ist klar. *(1 Punkt)* Zusätzlich braucht man für eine Überlagerung p_i, dass für alle $x \in B_i$ eine Umgebung $U_i(x)$ von x existiert, so dass $p^{-1}(U_i(x)) = \bigcup_\alpha V^i_\alpha$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen V_α ist und $p|_{V^i_\alpha} : V^i_\alpha \to U_i(x)$ ein Homöomorphismus für alle α ist. *(1 Punkt).* Nun ist jeder Punkte von $B_1 + B_2$ entweder in B_1 oder in B_2 (bzw. genauer in deren homöomorphen Kopien $B_1 \times \{0\}$ bzw. $B_2 \times \{1\}$). Ist nun $x \in B_i$, dann nehme die Umgebung $U_i(x)$, deren Urbild ist wieder die Vereinigung der V^i_α. Und nach Definition der topologischen Summe, sind diese Mengen auch jeweils Umgebungen bzw. offene Mengen in der jeweiligen topologischen Summe. *(1 Punkt)*

(b) Eine solche Überlagerung $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ wäre insbesondere surjektiv. Nun ist aber $\mathbb{S}^2$ kompakt, $\mathbb{R}^2$ aber nicht. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Bilder kompakter Mengen kompakt sind. Also kann es keine Überlagerung $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ geben. *(2 Punkte)*

Insgesamt waren *35 Punkte* zu erreichen.