Klausur - Topologie
Stuttgart - WS 2012/13

Einige Vorbemerkungen: Begründen Sie ihre Aussagen genau, die meisten Punkte gibt es für die Begründung, nicht für das Resultat. Sie dürfen Sätze aus der Vorlesung oder Resultate der Übung zitieren (außer die Aufgabe fragt explizit danach). Das Hinschreiben der *relevanten* Definitionen oder eine anschauliche Begründung kann Teilpunkte geben.

Aufgabe 1. (a) *(3 Punkte)* Geben Sie alle Topologien auf $X = \{a, b\}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) *(3 Punkte)* Wie viele gibt es bis auf Homöomorphie, d.h. welche der in (a) bestimmten topologischen Räume sind homöomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) *(2 Punkte)* Geben Sie einen topologischen Raum mit mehr als einem Element an, so dass alle Folgen in diesem Raum konvergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 2. (a) *(4 Punkte)* Seien G, H topologische Gruppen. Zeigen Sie, dass ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ genau dann stetig ist, wenn er stetig beim neutralen Element $e \in G$ ist.

(b) *(2 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum, so dass jede stetige Abbildung $f : X \to X$ einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum, $A, B \subseteq X$ kompakte Teilräume. Zeigen Sie:

(a) *(2 Punkte)* $A \cup B$ ist kompakt.

(b) *(2 Punkte)* Ist X hausdorffsch, so ist auch $A \cap B$ kompakt.

Aufgabe 4. (a) *(2 Punkte)* Definieren Sie den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit.

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Einbettung $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz ist.

(c) *(2 Punkte)* Warum ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x \mapsto (x, 1)$ keine Homotopieäquivalenz?

Aufgabe 5. *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$ gibt.

Aufgabe 6. (a) *(2 Punkte)* Erläutern Sie, inwiefern die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes von der Wahl des Basispunktes abhängt.

(b) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des Möbiusbandes, d.h. des topologischen Raumes, der gegeben ist durch den Quotienten von $\mathbb{R}^2$ nach der Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}$, die gegeben ist durch $t \cdot (x, y) = (x + t, (-1)^t y)$.

Aufgabe 7. (a) *(3 Punkte)* Seien $p_1 : E_1 \to B_1$ und $p_2 : E_2 \to B_2$ Überlagerungen. Sei $p : E_1 + E_2 \to B_1 + B_2$ definiert durch $p((e_1, 0)) = p_1(e_1)$ für $e_1 \in E_1$ und $p((e_2, 1)) = p_2(e_2)$ für $e_2 \in E_2$. Zeigen Sie, dass p eine Überlagerung ist.

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass es keine Überlagerung $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt.

Insgesamt sind *35 Punkte* zu erreichen. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.