A. Kollross 16. Januar 2013

Vorlesung **Topologie** im WS 2012/2013 an der Universität Stuttgart
Zusammenfassung des Vorlesungsinhalts

EINFÜHRUNG

Was ist Topologie? Topologische Begriffe; Aufbau der Vorlesung.

KAPITEL I – GRUNDBEGRIFFE

1. Metrische und topologische Räume. Metrische Raum; Euklidische Norm; Euklidische Abstandsfunktion; Beispiel: Diskrete Metrik; Konvergenz in metrischen Räumen; Eindeutigkeit des Limes im metrischen Raum; ε-δ-Definition der Stetigkeit; Äquivalenz zur Folgenstetigkeit; offener ε-Ball; offene/abgeschlossene Menge; Umgebungen; ε -Bälle sind offen; eine Folge ist konvergent, wenn fast alle Folgenglieder in der Umgebung eines Punktes liegen; Charakterisierung stetiger Abbildungen mit Umgebungen; eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind; topologischer Raum; offene/abgeschlossene Teilmenge; Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$; verschiedene Metriken können die gleiche Topologie erzeugen; Stetigkeit; jeder metrische Raum ist ein topologischer Raum; Umgebungen; innerer, äußerer, Randpunkt; offener Kern; abgeschlossene Hülle; Rand; Beispiele für Topologien; metrisierbar; diskrete Topologie; feinere/gröbere Topologie; unvergleichbare Topologien; Konvergenz im topologischen Raum; Stetigkeit; stetige Abbildungen bilden konvergente Folgen auf konvegente Folgen ab;

2. Einige Grundkonstruktionen. Topologische Summe; Teilraumtopologie; Produkttopologie; Äquivalenzrelation; Quotiententopologie; Zusammenschlagen eines Teilraums zu einem Punkt; Kegel; finale und initiale Topologie; Kennzeichnung von Teilraum- und Quotiententopologie als initiale bzw. finale Topologie: finale und initiale Topologie bezüglich einer Familie von Abbildungen; Produkttopologie als initiale Topologie; Beispiel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3. Hausdorffräume. Hausdorffsches Trennungsaxiom; metrische Räume sind Hausdorffsch; jeder Teilraum eines Hausdorffraumes ist Hausdorffsch; zwei nichtleere Räume sind genau dann Hausdorffsch, wenn ihre Summe bzw. ihr Produkt Hausdorffsch ist; Gegenbeispiel dafür, dass sich Hausdorffeigenschaft nicht auf Quotienten vererbt; in einem Hausdorffraum ist der Limes einer konvergenten Folge eindeutig und Punkte sind abgeschlossen.

4. Zusammenhang und Wegzusammenhang. Zusammenhang; Wegzusammenhang; wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend, Umkehrung gilt im allgemeinen nicht; Wegzusammenhangskomponente; stetige Bilder (weg-) zusammenhängender Räume sind wegzusammenhängend; (Weg-) Zusammenhang von Vereinigungen und Produkten; Zusammenhangskomponenten; jeder Punkt liegt in genau einer Komponente; Komponenten sind abgeschlossen.

5. Abzählbarkeitsaxiome. Basis; Subbasis; zu jeder Teilmenge der Potenzmenge gibt es genau eine Topologie mit dieser Teilmenge als Subbasis; Produkt unendlich vieler Räume; Umgebungsbasis; Abzählbarkeitsaxiome; 2. Abzählbarkeitsaxiom $\Rightarrow$ 1. Abzählbarkeitsaxiom; unter dem 1. Abzählbarkeitsaxiom sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent.

6. Kompaktheit. Offene Überdeckungen; Kompaktheit; Heine-Borelscher Überdeckungssatz; kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen und beschränkt; stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt; abgeschlossene Teilräume kompakter Teilmengen sind kompakt; in Hausdorffräumen sind kompakte Teilräume abgeschlossen, eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist ein Homöomorphismus; unter dem 2. Abzählbarkeitsaxiom sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

7. Topologische Mannigfaltigkeiten. Topologische Mannigfaltigkeiten sind zum $\mathbb{R}^n$ lokal homöomorphe Hausdorffräume, in denen das 2. Abzählbarkeitsaxiom gilt; Beispiele; Summe, Produkte und offene Teilmengen topologischer Mannigfaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten; ein Quotient einer topologischen Mannigfaltigkeit nach einer endlichen fixpunkfreien Homöomorphismengruppe ist eine topologische Mannigfaltigkeit; für topologische Mannigfaltigkeiten sind äquivalent: Kompaktheit und Folgenkompaktheit, Zusammenhang und Wegzusammenhang, Stetigkeit und Folgenstetigkeit; schwache Version des Whitneyschen Einbettungssatzes.

8. Homotopie. Eine Homotopie ist eine parametrisierte Schar stetiger Abbildungen; Homotopieäquivalenz; Beispiele; Deformationsretrakt; $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{G}\ell(n, \mathbb{R})$ als Beispiel für starken Deformationsretrakt.

KAPITEL II – ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

1. Die Fundamentalgruppe. Wege und Schleifen; Produkt und Inverses von Wegen; Homotopie von Wegen mit festen Endpunkten; Homotopie mit festen Endpunkten ist eine Äquivalenzrelation; Fundamentalgruppe; Nachweis der Gruppeneigenschaften; Beispiele: $\pi_1(\mathbb{R}^n; 0) = 1$; $\pi_1(\mathrm{S}^1; 1) \cong \mathbb{Z}$; Fundamentalgruppen der Linsenräume; basiserhaltende stetige Abbildungen induzieren Homomorphismen der Fundamentalgruppen; Fundamentalgruppe von Produkträumen; Fundamentalgruppe des Torus; Abhängigkeit von der Wahl des Basispunkts; Abhängigkeit der Fundamentalgruppe von punktierter bzw. freier Homotopie und Homotopieäquivalenz.

2. Überlagerungen. Überlagerung, trivial überlagerte Umgebungen, Faser; Beispiele; Hochhebung; Eindeutigkeit von Hochhebungen; Homotopie-Hochhebungssatz; Wege-Hochhebungssatz; Monodromielemma; erneuter Beweis von $\pi_1(\mathrm{S}^1; 1) \cong \mathbb{Z}$.

3. Gruppenwirkungen und Klassifikation von Überlagerungen. Topologische Gruppen; Gruppenwirkungen; Bahn; Standgruppe=Isotropiegruppe; blätternde Gruppenwirkungen; kanonische Projektionen einer blätternden Gruppenwirkungen ist Überlagerung; Wirkung der Fundamentalgruppe auf der Faser; charakteristische Untergruppe; lokaler Wegzusammenhang; Hochhebungssatz; Vergleich von Überlagerungen; universelle=einfach zusammenhängende Überlagerung; Normalisator, normale Untergruppen; Normalisator der charakteristischen Untergruppe wirkt auf dem Totalraum; Isomorphiebegriff für Überlagerungen.

4. Universelle Überlagerung und Decktransformationen. Decktransformationen=Automorphismen einer Überlagerung; Decktransformationen und Fundamentalgruppe des Basisraums bei universeller Überlagerung; semi-lokal einfacher Zusammenhang; Existenz der universellen Überlagerung.

5. Der Satz von Seifert-van Kampen. Normalteiler; Kern eines Gruppenhomomorphismus; freies Produkt von Gruppen; Wort; reduziertes Wort; von einer Teilmenge erzeugte Untergruppe; von einer Teilmenge erzeugter Normalteiler; Satz von Seifert-van Kampen; Spezialfälle; Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen.

KAPITEL III – GEOMETRISCHE ANWENDUNGEN

1. Klassifikation der geschlossenen Flächen. Kombinatorische Fläche; Zerschneidung; eine zusammenhängende kombinatorische Fläche lässt sich zu einem m-Eck zerschneiden; Polygon-Modell; Flächen-Wort; Beiziehen; Ecken-Reduktion; Kreuzhauben-Normierung; Henkel-Normierung; Henkel-Elimination; Klassifikationssatz, Fundamentalgruppen von Flächen.

LITERATUR

[1] Klaus Jänich: Topologie, Springer.
[2] Erich Ossa: Topologie, Vieweg.