Datum 11.08.2012

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur

Aufgaben, die unten **Teil I** sind, gehören zu Mathematik I.
Aufgaben, die unten **Teil II** sind, gehören zu Mathematik II.

Bearbeitungszeit:

Wenn Teil I und II bearbeitet wird: 180 Minuten.
Wenn nur Teil I oder II bearbeitet wird: 120 Minuten.

Zulässige Hilfsmittel:

Zwei beliebig handbeschriebene Blätter DIN A4 und ein nichtprogrammierter Taschenrechner.

Bitte eigenes **Papier** verwenden und **jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer** versehen.

Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren **Lösungsweges** können nicht gewertet werden.

Teil I

Aufgabe 1 (14 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{15n^3 - 10n^2}{7n^2 - 10n + 2}, \quad b_n := \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{(n^2+1)^2}, \quad c_n := \sqrt{6n^6 + n^2} - \sqrt{6n^6 + n^3 - n^2}.$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to(-7)} f(x), \quad \lim_{x\to 1+} f(x), \quad \lim_{x\to 1-} f(x) \text{ und } \lim_{x\to 1} f(x)$$

$$\text{mit } f(x) := \frac{x^3 + 9x^2 + 15x + 7}{x^2 + 6x - 7}.$$

Aufgabe 1 Lösungsvorschlag:

a)

$$a_n := \frac{15n^3 - 10n^2}{7n^2 - 10n + 2} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{15 - 10/n}{7 - 10/n + 2/n^2} \to \infty \cdot \frac{15}{7} = \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Damit ist die Folge bestimmt divergent mit dem Grenzwert $+\infty$.

$$b_n := \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{(n^2+1)^2} = \frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{1 - 2/n^2 + 1/n^4}{(1 + 1/n^2)^2} \to 1 \cdot \frac{1}{1^2} = 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Damit ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert 1.

$$c_n = \frac{6n^6 + n^2 - 6n^6 - n^3 + n^2}{\sqrt{6n^6 + n^2} + \sqrt{6n^6 + n^3 - n^2}} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{-1 + 2/n}{\sqrt{6 + 1/n^4} + \sqrt{6 + 1/n^3 - 1/n^4}} \to 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} \left(= -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right)$$

für $n \to \infty$. Damit ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert $-1/(2\sqrt{6})$.

b)

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 15x + 7}{x^2 + 6x - 7} = \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1 + 9/x + 15/x^2 + 7/x^3}{1 + 6/x - 7/x^2} \to \infty \cdot \frac{1}{1} = \infty \text{ für } x \to \infty.$$

Da der Nenner sowohl bei 1 als auch bei (-7) gleich 0 ist, müssen wir soweit wie möglich durch Linearfaktoren kürzen. Bei dem Zähler erhalten wir $x^3 + 9x^2 + 15x + 7\big|_{x=1} = 1 + 9 + 15 + 7 \neq 0$ und durch Anwendung des Horner–Schemas:

	1	9	15	7
		-7	-14	-7
-7	1	2	1	0

also $(x^3 + 9x^2 + 15x + 7) = (x - (-7))(x^2 + 2x + 1)$.

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 15x + 7}{x^2 + 6x - 7} = \frac{(x+7)(x^2 + 2x + 1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} \to \frac{(-7)^2 - 14 + 1}{-7 - 1} \left(= -\frac{36}{8} \right) \text{ für } x \to (-7)$$

$$\frac{x^3+9x^2+15x+7}{x^2+6x-7} = \frac{x^2+2x+1}{x-1} = \frac{1}{x-1}\cdot(x^2+2x+1) \to (\pm\infty)\cdot 4 = \pm\infty \text{ für } x \to 1\pm,$$

da $(x-1)$ von oben (unten) gegen 0 strebt, wenn x von oben (unten) gegen 1 strebt. Da nun die beiden einseitigen Grenzwerte verschieden sind, existiert

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

nicht.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Kredit in Höhe von 40 000 Euro soll mit festen monatlichen Beträgen A zurückgezahlt werden, und zwar jeweils am Ende des Monats. Der nominelle Jahreszinssatz betrage 6%, die Zinsgut- oder lastschrift erfolgt ebenfalls monatlich.
Wie gross muss A sein, damit der Kredit nach 10 Jahren vollständig abgezahlt ist?

Aufgabe 2 Lösungsvorschlag: Es wird ein konstanter Betrag A monatlich (nachschüssig) zurückgezahlt, und zwar 10 Jahre lang. Damit gilt nach Formel mit $m = 12$ und

$$q_{12} = 1 + \frac{6}{100\cdot 12} = 1.005$$

und $N = 10\cdot 12 = 120$ (Laufzeit in Monaten) für den Betrag der monatlichen Zahlung:

$$A = 40000\cdot 1.005^{120}\frac{0.005}{1.005^{120}-1} = 444.08.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie A^2 und die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 3 Lösungsvorschlag:

Zu A^2. Es wird

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zu A^{-1}. Wir formen um.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Vorgegeben sei die Funktion

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10,\ x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie

a) die Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend ist, und

b) die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist.

Prüfen Sie, ob $f(x)$ (relative) Extremwerte besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Stelle(n), an der (denen) sie angenommen werden

Aufgabe 4 Lösungsvorschlag:

$f'(x) := 4x^3 - 12x^2 = x^2 \cdot (4x - 12)$

Da x^2 immer ≥ 0 ist, ist
$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (4x - 12) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ und
$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (4x - 12) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

a) f ist auf $[3, \infty)$ monoton wachsend und

b) f ist also auf $(-\infty, 3]$ monoton fallend.

Da f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, besitzt f an der Übergangsstelle $x = 3$ ein relatives Minimum.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

a) den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$,

b) den Flächeninhalt des von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms und

c) das Volumen des von den drei Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ aufgespannten Spats.

Aufgabe 5 Lösungsvorschlag:

$|\mathbf{a}_1| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$, $|\mathbf{a}_2| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

a) Für den Winkel $\varphi(\overset{!}{\in} [0, \pi])$ zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ gilt

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}}\right) \left(= \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{14 \cdot 17}}\right)\right)$$

$$\left(\cos\varphi = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} \text{ist auch glt. Lsg}\right)$$

b)

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 0 - 3\cdot 1 \\ 3\cdot 4 - 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir fr den Flcheninhalt des Parallelogramms

$$F = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 12^2}\ (= \sqrt{189})$$

c) das Volumen des Spats

$$V = |(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |6\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 12\cdot 0| = 12.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^\pi x\,\cos x\,dx\,, \qquad \int_0^2 2x\,\cos(x^2)\,dx\,.$$

Aufgabe 6 Lösungsvorschlag:

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [\cos x]_0^\pi = \cos\pi - \cos 0 = -2$$

Mit der Substitution $x^2 =: u$ ($\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$) erhalten wir:

$$\int_0^2 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \cos u\,\mathrm{d}u = [\sin u]_0^4 = \sin 4 - \sin 0 = \sin 4.$$

Teil II

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Erfahrungsgemäß werden auf einem Hafenmarkt $f(x) := 10\cdot 2^{-x/100}$ Tonnen Eternit nachgefragt, wenn der Verkäufer den Gewinn zu x Euro pro Tonne ansetzt. Es kann die Nachfrage auch immer voll befriedigt werden.

a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x)$ und von $f'(x)$.

b) Wie hat der Verkäufer den Gewinn pro Tonne anzusetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren?

Aufgabe 7 Lösungsvorschlag:
Es wird

$$\begin{aligned} f(x) &= 10\cdot 2^{-x/100} \\ f'(x) &= 10\cdot 2^{-x/100}\cdot(-\tfrac{1}{100}\ln(2)) \\ f''(x) &= 10\cdot 2^{-x/100}\cdot(-\tfrac{1}{100}\ln(2))^2\,. \end{aligned}$$

Es wird

$$\mathrm{E}_f(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; -\frac{\ln(2)}{100} \cdot x \,.$$

Es wird

$$\mathrm{E}_{f'}(x) \;=\; \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x \;=\; -\frac{\ln(2)}{100} \cdot x \,.$$

Überprüfen wir die Voraussetzungen unseres Lemmas.

Es ist $f(x) = 10 \cdot 2^{-x/100} > 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Es ist $f'(x) = 10 \cdot 2^{-x/100} \cdot (-\frac{1}{100}\ln(2)) < 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Es ist $\mathrm{E}_f(x) = \mathrm{E}_{f'}(x)$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$, und somit insbesondere nie zugleich $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$.

Also können wir unser Lemma anwenden.

Demgemäß nimmt der Gesamtgewinn
$G(x) = x \cdot f(x)$ bei $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ sein Maximum an, falls $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ ist, d.h. falls $-\frac{\ln(2)}{100} \cdot x_0 = -1$ ist, d.h. bei

$$x_0 \;=\; \frac{100}{\ln(2)} \;\overset{\text{TR}}{\approx}\; 144{,}27 \quad \text{Euro pro Tonne}\,.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := e^x \cos(x)$.

a) die Koeffizienten des Taylorpolynom zweiter Ordnung um $x = 0$.

b) verwenden Sie das Taylorpolynom von $f(x) := e^x \cos(x)$ in 3-ter Ordnung um $\int_{-1/2}^{+1/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$ anzunähern.

Aufgabe 8 Lösungsvorschlag:
$f(0) = e^0 \cos 0 = 1$
$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x), \quad f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x) - e^x \cos(x) = -2e^x \sin(x), \quad f''(0) = 0$
$f'''(x) = -2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x), \quad f'''(0) = -2$

a) Die Koeffizienten des Taylor Polynoms zweiter Ordnung um $x = 0$ sind somit: $1, 1, 0$.

b) Die Koeffizienten des Taylor Polynoms 3-ter Ordnung um $x = 0$ sind somit: $1, 1, 0, -2/6$.

$\int_{-1/2}^{+1/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{-1/2}^{+1/2} (1 + x - \frac{1}{3}x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+1/2} 1\,\mathrm{d}x = 1$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sei $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + xz + z^2 + xyz$ auf $\mathbb{R}^3$.
Sei $g(x, y, z) := xy + 3xz - 3$ auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Ist $(0, 0, 0)$ eine lokale Extremstelle von f? Wenn ja, was für eine?

(b) Ist $(1, 0, 1)$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?
Wenn ja, was für eine?

Aufgabe 9 Lösungsvorschlag:

(a) Es ist

$$\nabla_f(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} 2x+z+yz \\ 2y+xz \\ x+2z+xy \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\nabla_f(0, 0, 0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

und somit $(0, 0, 0)$ eine Flachstelle von f.

Ferner ist

$$\mathrm{H}_f(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & z & 1+y \\ z & 2 & x \\ 1+y & x & 2 \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\mathrm{H}_f(0, 0, 0) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Es ist
$\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0, 0, 0)) = 2 > 0$,
$\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, 0, 0)) = 4 > 0$ und
$\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(0, 0, 0)) \;=\; \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 1\cdot(0\cdot 0-(-3)\cdot 2) \;=\; 6 > 0$.

Also ist $(0, 0, 0)$ eine lokale Minimalstelle von f und so insbesondere eine lokale Extremstelle von f.

(b) Zunächst ist in der Tat $g(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 = 0$.

Es ist, wie in (a),

$$\nabla_f(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} 2x+z+yz \\ 2y+xz \\ x+2z+xy \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\nabla_f(1, 0, 1) \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\nabla_g(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} y+3z \\ x \\ 3x \end{pmatrix} .$$

Da nur eine Nebenbedingung vorliegt, ist

$$N(1, 0, 1) \;=\; \nabla_g(1, 0, 1) \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Folglich ist

$$\nabla_f(1, 0, 1) \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1 \;=\; N(1, 0, 1) \cdot \rho_1 ,$$

und der Lagrangemultiplikator ergibt sich eindeutig zu $r = (\,\rho_1\,) = (\,1\,)$.

Wegen $g(1, 0, 1) = 0$ und wegen der eindeutigen Existenz des Lagrangemultiplikators ist $(1, 0, 1)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Wir lösen nun $N(1,0,1)^{\mathrm{t}}\, u = 0$ für $u \in \mathbf{R}^{3\times 1}$. Die erforderliche Umformung in Zeilenstufenform besteht nur aus einer Multiplikation der einzigen Zeile, nämlich

$$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 3 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) .$$

Wir erhalten gemäß Algorithmus die allgemeine Lösung

$$\{\, u \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; N(1,0,1)^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\} \;=\; \{\, \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R} \,\}$$

und also $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Auch jede andere Matrix, deren Spaltentupel eine Basis des Lösungsraums ist, kann hier als U Verwendung finden.

Weiter wird

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(x,y,z) - \rho_1\, g(x,y,z) \\ &= (x^2 + y^2 + xz + z^2 + xyz) - 1 \cdot (xy + 3xz - 3) \\ &= x^2 + y^2 - 2xz + z^2 + xyz - xy + 3 \,. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\mathrm{H}_F(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & z-1 & -2+y \\ z-1 & 2 & x \\ -2+y & x & 2 \end{pmatrix} ,$$

und also

$$\mathrm{H}_F(1,0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(1,0,1)\, U \;=\; \begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & 8 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ist positiv definit, da $\mathrm{M}_1(\begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & 8 \end{pmatrix}) = \frac{20}{9} > 0$ und $\mathrm{M}_2(\begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & 8 \end{pmatrix}) = \frac{37}{3} > 0$ ist.

Also ist $(1,0,1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

a) Zerlegen Sie $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+1)^2}$ in Partialbrüche.

b) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 10 Lösungsvorschlag:

a) Wir suchen A, B, $C \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)^2} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \,.$$

Durchmultiplizieren mit $(x+2)(x+1)^2$ gibt die Bedingung

$$1 \stackrel{!}{=} A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x + 2) \,.$$

Wir formen das für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ entstehende lineare Gleichungssystem um.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$.

$\frac{1}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

b) Folglich wird

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln(x+2)]_{x=0}^1 - [\ln(x+1)]_{x=0}^1 + [-(x+1)^{-1}]_{x=0}^1 \\ &= \ln(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{2} \\ &\overset{\text{TR}}{\approx} 0{,}2123\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 11 (6 Punkte) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' - 2y = 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -2$.

Aufgabe 11 Lösungsvorschlag:

In den Bezeichnungen von Skript ist $a = 1$, $b = -2$ und $c(x) = 0$, wir sind also im homogenen Fall.

Ferner ist $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ und $y_0' = -2$.

Da $a^2 = 1 > -2 = b$ ist, sind wir in Fall (1) des Lemmas in Skript.

Somit wird $v = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{1-(-2)} = \sqrt{3}$ und

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx}) = \mathrm{e}^{-x}(r\,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} + s\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}) = r\,\mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + s\,\mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}$$

mit noch zu bestimmenden $r,\ s \in \mathbb{R}$.

Es wird

$$y'(x) = r(-1+\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + s(-1-\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}\,.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0 = 2 \overset{!}{=} r\,\mathrm{e}^{0(-1+\sqrt{3})} + s\,\mathrm{e}^{0(-1-\sqrt{3})} = r + s\,.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y'(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0' = -2 \overset{!}{=} r(-1+\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{0(-1+\sqrt{3})} + s(-1-\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{0(-1-\sqrt{3})} = r(-1+\sqrt{3}) + s(-1-\sqrt{3})\,.$$

Wir lösen, unter Zuhilfenahme zweier naheliegender vorbereitender Schritte,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\,.$$

Also ist $r = 1$ und $s = 1$. Das liefert die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + \mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}\,.$$

auf $\mathbb{R}$.