Aufgabe 52 Jede der folgenden reellen Funktionen

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \sin(x), \qquad h(x) = \exp(x^2),$$

löst genau eine der folgenden Differentialgleichungen

$$y' = 2yx, \qquad y'' = -y, \qquad y' = y.$$

Ordnen Sie zu und begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 52 Es gilt:

$$f'(x) = e^x = f(x); \quad g''(x) = -\sin(x) = -g(x); \quad h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = h(x) \cdot 2x,$$

Daraus folgt, dass f die Gleichung $y' = y$, g die Gleichung $y'' = -y$ und h die Gleichung $y' = 2yx$ löst.

Aufgabe 53 Zeichnen Sie das Steigungsfeld, das durch die beiden folgenden Differentialgleichungen jeweils gegeben ist.

a)
$$y' = \frac{y}{x}$$

b)
$$y' = -\frac{x}{y}$$

Versuchen Sie, aufgrund der Ihrer Zeichnung möglichst viele Lösungen zu erraten.

Lösung zu Aufgabe 53

a) Steigungsfeld: Die Steigungen entsprechen denen von Geraden durch den Ursprung. In der Tat, lineare Funktionen des Typs $x \mapsto mx$, $m \in \mathbb{R}$ lösen die Gleichung.

b) Steigungsfeld: Die Steigungen entsprechen denen von Tangenten von Kreisen um den Ursprung. In der Tat, Funktionen des Typs $x \mapsto \pm\sqrt{x^2 + r}$, $r > 0$, lösen die Gleichung.

Aufgabe 54 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a)
$$y' = yx, \quad y(0) = 1.$$

b)
$$y' = x/y, \quad y(0) = 1.$$

c)
$$y' = x^2 e^{-y}, \quad y(0) = 0.$$

d)
$$y' = y^2 e^{-x}, \quad y(1) = 1.$$

e)
$$y' = y \sin(x), \quad y(0) = 1.$$

Hinweis: Trennung der Variablen.

Lösung zu Aufgabe 54

a) Wir lösen das Anfangswertproblem
$$y' = yx, \quad y(0) = 1.$$
Wir setzen $f(x) = x$ und $g(y) = y$. Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} t \, dt = [\tfrac{1}{2}t^2]_0^x = \tfrac{1}{2}x^2, \\ H(y) &= \int_{y_0}^{y} \tfrac{1}{s} \, ds = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y). \end{aligned}$$
Eine differenzierbare Umkehrfunktion von H ist gegeben durch
$$H^{-1}(x) = e^x.$$
Die gesuchte Lösung ist somit
$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = \exp(\tfrac{1}{2}x^2).$$

b) Wir lösen das Anfangswertproblem
$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$
Wir setzen $f(x) = x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$. Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} t \, dt = [\tfrac{1}{2}t^2]_0^x = \tfrac{1}{2}x^2, \\ H(y) &= \int_{y_0}^{y} s \, ds = [\tfrac{1}{2}s^2]_1^y = \tfrac{1}{2}(y^2 - 1). \end{aligned}$$

Eine differenzierbare Umkehrfunktion von H ist gegeben durch (wir nehmen $y > 0$ an)

$$H^{-1}(x) = \sqrt{2x + 1}.$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

c) Wir lösen das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 e^{-y}, \quad y(0) = 0.$$

Wir setzen $f(x) = x^2$ und $g(y) = e^{-y}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} t^2 \, dt = [\tfrac{1}{3}t^3]_0^x = \tfrac{1}{3}x^3, \\ H(y) &= \int_{y_0}^{y} e^s \, ds = [e^s]_0^y = e^y - 1. \end{aligned}$$

Eine differenzierbare Umkehrfunktion von H ist gegeben durch

$$H^{-1}(x) = \ln(x + 1).$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = \ln(\tfrac{1}{3}x^3 + 1).$$

d) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 e^{-x}, \quad y(1) = 1.$$

Wir setzen $f(x) = e^{-x}$ und $g(y) = y^2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1}, \\ H(y) &= \int_{y_0}^{y} s^{-2} = [-s^{-1}]_1^y = -y^{-1} + 1. \end{aligned}$$

Eine differenzierbare Umkehrfunktion von H ist gegeben durch

$$H^{-1}(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = \frac{1}{1 + e^{-x} - e^{-1}}.$$

e) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y\sin(x), \quad y(0) = 1.$$

Wir setzen $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = y$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^x = 1 - \cos(x), \\ H(y) &= \int_{y_0}^{y} \tfrac{1}{s}\,ds = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y). \end{aligned}$$

Eine differenzierbare Umkehrfunktion von H ist gegeben durch

$$H^{-1}(x) = e^x.$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = e^{1-\cos(x)}$$