Aufgabe 48

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 von $f(x) = \cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von $g(x) = \sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 48

a) Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k.$$

Die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rcrcrcr}
f^{(0)}(x) & = & \cos(x) & \to & \cos(0) & = & 1 \\
f^{(1)}(x) & = & -\sin(x) & \to & -\sin(0) & = & 0 \\
f^{(2)}(x) & = & -\cos(x) & \to & -\cos(0) & = & -1 \\
f^{(3)}(x) & = & \sin(x) & \to & \sin(0) & = & 0 \\
f^{(4)}(x) & = & \cos(x) & \to & \cos(0) & = & 1.
\end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

als Taylorpolynom vom Grad 4 für die Funktion $f(x) = \cos(x)$ um $x_0 = 0$. Mit einer (nicht einfachen) Abschätzung des Restglieds in der Taylorformel erhält man die Taylorreihe

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

b) Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k.$$

Die Ableitungen $g^{(k)}(1)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rcllcrcr}
g^{(0)}(x) & = & \sqrt{x} & \to & g^{(0)}(1) & = & 1 \\
g^{(1)}(x) & = & \frac{1}{2}x^{-1/2} & \to & g^{(1)}(1) & = & \frac{1}{2} \\
g^{(2)}(x) & = & -\frac{1}{4}x^{-3/2} & \to & g^{(2)}(1) & = & -\frac{1}{4} \\
g^{(3)}(x) & = & \frac{3}{8}x^{-5/2} & \to & g^{(3)}(1) & = & \frac{3}{8}.
\end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

als Taylorpolynom vom Grad 3 für die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ um $x_0 = 1$.

Aufgabe 49 Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster und zweiter Ordnung von

$$f(x,y,z) = \cos(x)e^{yz}$$

um den Punkt $(0,0,0)$. Berechnen Sie jeweils den Betrag der Differenz zwischen Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms bei $(0.1, 0.1, 0.1)$.
Lösung: Es ist

$$\begin{array}{rcl}
f &=& \cos(x)e^{yz} \\
f_x &=& -\sin(x)e^{yz} \\
f_y &=& z\cos(x)e^{yz} \\
f_z &=& y\cos(x)e^{yz} \\
f_{xx} &=& -\cos(x)e^{yz} \\
f_{xy} &=& -z\sin(x)e^{yz} \\
f_{xz} &=& -y\sin(x)e^{yz} \\
f_{yy} &=& z^2\cos(x)e^{yz} \\
f_{yz} &=& \cos(x)e^{yz} + yz\cos(x)e^{yz} = (1+yz)\cos(x)e^{yz} \\
f_{zz} &=& y^2\cos(x)e^{yz}
\end{array}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung um $(0,0,0)$ ergibt sich zu

$$\begin{array}{rcl}
f(x,y,z) &=& f(0,0,0) + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(0,0,0) \\ f_y(0,0,0) \\ f_z(0,0,0) \end{pmatrix} \\
&=& 1 + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&=& 1\ .
\end{array}$$

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle $(\,0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ,\ -0{,}1\,)$ ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ,\ -0{,}1\,) - 1| = |\cos(0{,}1)\,e^{0{,}1\cdot(-0{,}1)} - 1| \ \approx\ 1{,}4896\cdot 10^{-2}\ .$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um $(0,0,0)$ ergibt sich zu

$$\begin{array}{rcl}
f(x,y,z) &=& f(0,0,0) + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(0,0,0) \\ f_y(0,0,0) \\ f_z(0,0,0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0,0) & f_{xy}(0,0,0) & f_{xz}(0,0,0) \\ f_{yx}(0,0,0) & f_{yy}(0,0,0) & f_{yz}(0,0,0) \\ f_{zx}(0,0,0) & f_{zy}(0,0,0) & f_{zz}(0,0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&=& 1 + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&=& 1 - \frac{1}{2}x^2 + yz\ .
\end{array}$$

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle $(\,0{,}1\,,\;0{,}1\,,\;-0{,}1\,)$ ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}1\,,\;0{,}1\,,\;-0{,}1\,) - (1 - \tfrac{1}{2}\,0{,}1^2 + 0{,}1 \cdot (-0{,}1))| = |\cos(0{,}1)\,\mathrm{e}^{0{,}1\cdot(-0{,}1)} - 0{,}985| \;\approx\; 1{,}0371 \cdot 10^{-4}\;.$$

Aufgabe 50 Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x - 1$.

a) Hat f eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$?

b) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Newtonverfahrens zum Startwert $x_0 = 0$.

c) Konvergiert das Verfahren in b)? Falls nein, begründen Sie, warum nicht.

Lösung zu Aufgabe 50

a) Wegen $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$ hat f eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$.

b) Wir wenden zunächst das Newtonverfahren an, ohne vorher die Vorraussetzungen zu überprüfen. Es ist $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$. Mit $x_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{1} = 1 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

Also ist $x_2 = x_0$ und damit auch $x_3 = x_1 = 1$.

c) Das Verfahren konvergiert nicht, sondern pendelt stets zwischen den Werten 0 und 1. So ist zwar im Intervall $[0,1]$ stets $f'(x) > 0$, aber dies gilt nicht für die zweite Ableitung. Es ist $f''(x) = -12x^2 + 4 < 0$ wenn wir x nahe bei 1 wählen (etwa $x = \frac{3}{4}$).

Aufgabe 51 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - x - 1$. Wir wollen die positive reelle Nullstelle von f mit dem Newtonverfahren approximieren.

a) Bestimmen Sie ein Intervall $[a,b]$ mit $0 \leq a < b$ welches eine Nullstelle von f enthält.

b) Prüfen Sie, ob das Newtonverfahren in diesem Intervall anwendbar ist und berechnen Sie die ersten drei Iterierten.

c) Die positive Nullstelle von f ist $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Vergleichen Sie die Näherung mit dem exakten Wert der Nullstelle.

Lösung zu Aufgabe 51

a) Wir setzen in f verschiedene Werte für x ein und untersuchen, ob f das Vorzeichen wechselt. Es gilt $f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$. Also muss im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle von f liegen.

b) Es ist $f'(x) = 2x - 1$. Also ist $f'(x) > 0$ für $x > \frac{1}{2}$, insbesondere gilt dies also im Intervall $[1, 2]$. Für die zweite Ableitung erhält man $f''(x) = 2$ und somit stets $f''(x) > 0$. Wir können also das Newtonverfahren anwenden. Wir wählen als Startwert $x_0 = 1$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{1} = 2 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{5}{3} - \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{34}{21}.
\end{aligned}
$$

c) Der numerische Wert der Nullstelle beträgt $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803\ldots$. Der numerische Wert unserer Näherung beträgt $\frac{34}{21} = 1{,}61904\ldots$.