Aufgabe 39 Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = (2x - z^2, x^3 + e^y).$$

a) Begründen Sie, warum f differenzierbar ist.
b) Bestimmen Sie das totale Differential $Df(x,y,z)$ in einem beliebigen Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
c) Bestimmen Sie jeweils in den Punkten

$$(0,0,0) \text{ und } (-1,0,2)$$

die Jacobimatrix von f.

Lösung zu Aufgabe 39

a) Offensichtlich ist f stetig partiell differenzierbar, somit nach Satz 6.4.2 der Vorlesung total differenzierbar.
b) Die Berechnung der Jacobimatrix ergibt:

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2z \\ 3x^2 & e^y & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Durch Einsetzen in das in b) gefundene Ergebnis:

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Df(-1,0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40 Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix durch Zeilenumformungen und zusätzlich mit der Regel von Sarrus (Jägerzaunregel).

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 40 Wir bringen die Matrix mit dem Gaußalgorithmus auf Zeilenstufenform und merken uns für jede Zeilenvertauschung einen Faktor -1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1]{I.\leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I.+III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-3\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1]{II.\leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-5\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ergibt sich als Produkt der Diagonalelemente multipliziert mit den Faktoren -1, die wir uns gemerkt haben. Es ergibt sich also als Determinante

$$1 \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 4.$$

Alternativ berechnet sich die Determinante nach Sarrus zu

$$5 \cdot 3 \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot (-4) + (-6) \cdot 3 \cdot 0 - (-6) \cdot 3 \cdot (-4) - 5 \cdot 0 \cdot 5 - 8 \cdot 1 \cdot 3 = 4.$$

Aufgabe 41 Welche der folgenden Matrizen sind positiv bzw. negativ definit?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 27 & 17 & -8 & 91 \\ 17 & 41 & 13 & -3 \\ -8 & 13 & -103 & \pi \\ 91 & -3 & \pi & 11 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 41

a) Die Hauptminoren der Matrix A ergeben sich zu 2, 15 und 25. Also ist A positiv definit.
b) Die Hauptminoren der Matrix B ergeben sich zu -3, 8 und -16. Also ist B negativ definit.
c) Die Matrix C ist weder positiv noch negativ definit, da die Elemente auf der Hauptdiagonalen nicht alle dasselbe Vorzeichen haben.
Erläuterung: Setzt man den Standardbasisvektor e_i für x in $x^t Ax$ ein, erhält man genau den Wert a_{ii}, d.h. den i-ten Diagonaleintrag. Bei einer positiv (bzw. negativ) definiten Matrix sind also alle Diagonaleinträge positiv (bzw. negativ).

Aufgabe 42 Untersuchen Sie $f(x, y, z) = xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$ auf $\mathbb{R}^3$ auf lokale Extremstellen.

Lösung zu Aufgabe 42
Es ist

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die Einträge im Gradienten sind zufällig linear in x, y und z, was wir uns zunutze machen können. Es ist (x, y, z) nämlich genau dann eine Flachstelle, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

gilt. Eine Zeilenstufenform dieser Matrix ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Also hat das homogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung und $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ist die einzige Flachstelle von f. Untersuchen wir diese auf Extremstelle. Die Hessematrix ergibt sich zu

$$\mathrm{Hess} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

sie ist in diesem Beispiel konstant in (x, y, z). Die Hauptminoren sind 2, 3 und $\det(\mathrm{Hess} f(x, y, z)) = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4$. Somit ist $\mathrm{Hess} f(0, 0, 0)$ positiv definit und $(0, 0, 0)$ eine lokale Minimalstelle.