Aufgabe 35 Sei die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Begründen Sie, warum die Funktionen $x \mapsto f(x,y)$ und $y \mapsto f(x,y)$, die man erhält, wenn man f auf achsenparallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ einschränkt, stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.
b) Sei eine Folge im $\mathbb{R}^2$ definiert durch $a_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Konvergiert die Folge $f(a_k)$, und wenn ja, was ist der Limes?
c) Entscheiden Sie, ob f stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 35

a) Für achsenparallele Geraden, die nicht durch den Nullpunkt gehen, ist die Aussage klar. Für die Funktion $x \mapsto f(x,0)$ und $x \neq 0$ gilt $x \mapsto \frac{x^2}{x^2} = 1$, also ist die Funktion auch bei 0 stetig. Außerdem gilt für $y \mapsto f(0,y) = \left|\frac{-y^2}{y^2}\right| = 1$ für $y \neq 0$, somit ist auch diese Funktion stetig, auch bei $y = 0$.
b) Es gilt

$$f(a_k) = \left|\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}\right| = \frac{0}{1} = 0,$$

Die Folge $f(a_k)$ ist also konstant gleich Null und konvergiert somit gegen Null.
c) Die Funktion f ist nicht stetig, denn sonst müsste für die Folge a_k, die gegen Null geht, die Folge der Funktionswerte $f(a_k)$ gegen den Funktionswert $f(0,0) = 1$ konvergieren.

Aufgabe 36 Sei

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3}.$$

Bestimmen Sie

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \text{c) } \lim_{x\to 1} f(x).$$

Lösung zu Aufgabe 36

a) Es gilt

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3} = x \cdot \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}.$$

Der linke Faktor geht gegen ∞, der rechte gegen 1. Insgesamt folgt, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) Die Funktion ist stetig bei 0 und es gilt $f(0) = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

c) Sowohl Zähler als auch Nenner sind gleich Null für $x = 1$. Durch Polynomdivision kann man von beiden den Linearfaktor $(x-1)$ abspalten:

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2+3x+2}{x+3}.$$

Der letzte Term ist eine bei $x = 1$ stetige Funktion, die dort den Wert

$$\frac{x^2+3x+2}{x+3} = \frac{1+3+2}{1+3} = \frac{3}{2}$$

annimmt.

Alternativ: Mit der Regel von L'Hôpital (wird später in der Vorlesung erklärt).

Aufgabe 37 In dieser Aufgabe befassen wir uns mit Kapitalentwicklung, wobei wir annehmen, dass ein Bankguthaben nach Ablauf eines Jahres jeweils mit einem Zinssatz von 5% verzinst wird. Wir betrachten drei verschiedene Fälle.

a) Am Anfang werden €10.000,– eingezahlt, es finden keine weiteren Zahlungen statt.
b) Am Anfang jedes Jahres werden €1.000,– eingezahlt, bei Anfangskapital null.
c) Mit einem anfänglichen Kapital von €10.000,– wird begonnen, am Anfang jedes Jahres werden €1.000,– eingezahlt.

Berechnen Sie in allen drei Fällen, nach wieviel Jahren erstmals das Guthaben den Betrag von €30.000,– übersteigt.

Lösung zu Aufgabe 37 In allen drei Fällen haben wir den Zinsfaktor $q = 1{,}05$ und $K_n \geq 30.000$.

a) Das Guthaben nach n Jahren beträgt $K_n = K_0 \cdot q^n$, wobei $K_0 = 10.000$ das Anfangsguthaben ist. Wir erhalten die Formel

$$q^n = \frac{K_n}{K_0} \Leftrightarrow n = \log_q\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(q)}.$$

Wir erhalten $n \approx 22{,}5$, somit wird nach 23 Jahren zum ersten Mal der Betrag von €30.000,– überschritten.

b) Wir haben die Formel

$$K_n = r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

für die Kapitalentwicklung bei vorschüssiger Zahlweise: Wir lösen nach n auf:

$$\begin{aligned} 1 - q^n &= K_n \frac{1-q}{rq} \\ \Leftrightarrow q^n &= 1 - K_n \frac{1-q}{rq} \\ \Leftrightarrow n &= \log_q\left(1 - K_n \frac{1-q}{rq}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten $n \approx 18{,}2$, somit wird nach 19 Jahren zum ersten Mal der Betrag von €30.000,– überschritten.

c) Hier gilt für die Kapitalentwicklung, wobei $K_0 = 10.000$ das Anfangskapital und $r = 1.000$ die Rate ist (eine sogenannte *Sparkassenformel*):

$$K_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Wir stellen nach q^n bzw. n um:

$$\begin{aligned} K_n &= q^n\left(K_0 + \frac{rq}{q-1}\right) - \frac{rq}{q-1} \\ \Leftrightarrow q^n &= \frac{K_n + \frac{rq}{q-1}}{K_0 + \frac{rq}{q-1}} \\ \Leftrightarrow n &= \log_q\left(\frac{K_n + \frac{rq}{q-1}}{K_0 + \frac{rq}{q-1}}\right). \end{aligned}$$

Wir berechnen $\frac{rq}{q-1} = \frac{1050}{0{,}05} = 21.000$ und erhalten $n = \log_q(51.000/31.000) \approx 10{,}2$. Somit wird nach 11 Jahren zum ersten Mal der Betrag von €30.000,– überschritten.

Aufgabe 38 Sei die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ gegeben, wobei $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie die Steigung

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

der Sekante an den Graphen von f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ für $x, x+h \neq 0$.

b) Begründen Sie mit Hilfe von a), warum f differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung f' an.

c) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(2, \frac{1}{2})$ an.

Lösung zu Aufgabe 38

a) Für die Sekantensteigung erhalten wir

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} = -\frac{1}{(x+h)x}.$$

b) Der Limes für $h \to 0$ existiert und ist gleich $-\frac{1}{x^2}$, was der Wert der Ableitung $f'(x)$ ist.

c) Die Tangente hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$