Aufgabe 31 Welche Folgen sind konvergent?

a) $a_n = \dfrac{(n^2+1)(n^3-1)}{3n^5-4n^3}$,

b) $b_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^2+n}$,

c) $c_n = \dfrac{n^2}{n+3}$,

d) $d_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n}$.

Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 31

a) $a_n = \dfrac{(n^2+1)(n^3-1)}{3n^5-4n^3} = \dfrac{n^5-n^2+n^3-1}{3n^5-4n^3} = \dfrac{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^5}}{3-\frac{4}{n^2}} \to \dfrac{1}{3}$.

b) $b_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^2+n} = \dfrac{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}} \to \dfrac{0}{1} = 0$.

c) $c_n = \dfrac{n^2}{n+3} = \dfrac{n}{1+\frac{3}{n}} \to \infty$.

d) Mit Hilfe der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ erhält man:

$$\begin{aligned}
d_n &= \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n} = \\
&= \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}} = \\
&= \frac{n^2+n-n^2-2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} \to -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 32 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Reihen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{7}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Lösung zu Aufgabe 32 Die erste Reihe ist die Exponentialreihe mit $x = \frac{1}{3}$ eingesetzt. Ihr Wert ist $e^{\frac{1}{3}}$.

Die zweite ist eine geometrische Reihe, es ergibt sich mit der Summenformel für die geometrische Reihe der Grenzwert $\frac{1}{1-(-\frac{3}{7})} = 0{,}7$.

Die dritte Reihe ist die Exponentialreihe, wobei -1 eingesetzt und der 0-te Summand weggelassen wurde, also erhält man den Reihenwert $\frac{1}{e} - 1$.

Bei der vierten Reihe kann man durch Partialbruchzerlegung die Summanden vereinfachen; mit dem Ansatz

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n} = \frac{na + b(n+1)}{n(n+1)}$$

erhält man das lineare Gleichungssystem $a + b = 0$, $b = 1$. Also gilt

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \to 1,$$

es handelt sich also um eine sogenannte *Teleskopsumme*.

Aufgabe 33 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)\sin(n)}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 33

a) Die erste Reihe divergiert, da 2^n keine Nullfolge ist.
b) Die zweite Reihe ist eine geometrische Reihe $\sum^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{1}{5}$, also konvergent.
c) Die dritte Reihe lässt sich betragsmäßig durch eine geometrische Reihe abschätzen, also konvergiert sie (sogar absolut).
d) Bei der vierten Reihe lassen sich die Summanden von unten gegen die der harmonischen Reihe abschätzen, d.h. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, also divergiert die Reihe.

Aufgabe 34

a) Sei eine reelle (oder komplexe) Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

gegeben. Zeigen Sie: Gibt es eine positive reelle Zahl $q < 1$, so dass der Quotient aufeinander folgender Reihenglieder a_{n+1}/a_n betragsmäßig durch q von oben beschränkt ist, so dass also

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0| q^n$ eine konvergente Majorante.

b) Benutzen Sie a), um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$$

konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 34

a) Wir müssen zeigen, dass $|a_n| \leq |a_0|q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir beweisen dies per vollständiger Induktion.

Für $n = 0$ gilt offensichtlich $|a_0| \leq |a_0| \cdot q^0$.

Angenommen, es gilt $|a_n| \leq |a_0|q^n$ für ein n. Dann folgt

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1} \cdot a_n}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |a_n| \leq q \cdot q^n = q^{n+1}.$$

b) Wir berechnen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+2}{3^n}}\right| = \left|\frac{(n+3)3^n}{(n+2)3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+3}{n+2} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist ein q wie in a) gefunden, etwa $q = \frac{1}{2}$ und die Konvergenz der Reihe folgt.

Bemerkung: Das in Teilaufgabe a) bewiesene hinreichende Konvergenzkriterium für Reihen wird *Quotientenkriterium* genannt.