

Aufgabe 27 Sei eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4, 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4, 3x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4)$$

- a) Geben Sie die darstellende Matrix A an.
- b) Bestimmen Sie jeweils das Urbild der Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

unter der linearen Abbildung f .

- c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f .
- d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f .

Lösung zu Aufgabe 27

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b|c)$ um.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 13 & 1 \\ 3 & 10 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 14 & 8 & 2 & 6 & 26 & 2 \\ 6 & 20 & -2 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 29 & -5 & -8 & -16 & -47 \\ 0 & 29 & -5 & -8 & -16 & -15 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 29 & -5 & -8 & -16 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass der Vektor c nicht im Bild von f liegt, denn das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = c$ hat eine leere Lösungsmenge. Für den Vektor b ist die Lösungsmenge nicht leer, wir ermitteln sie durch Rückwärtseinsetzen, wobei wir $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$ setzen:

$$x_2 = \frac{1}{29}(-16 + 5t_1 + 8t_2)$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(6 + \frac{3}{29}(-16 + 5t_1 + 8t_2) - t_1 - 2t_2 \right) = \\ &= \frac{1}{29}(63 - 7t_1 - 17t_2). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{1}{29}(63 - 7t_1 - 17t_2) \\ \frac{1}{29}(-16 + 5t_1 + 8t_2) \\ t_1 \\ t_2 \end{array} \right) \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Eine Basis des Kerns von f kann man direkt aus dem Ergebnis von b) ablesen:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix},$$

wobei wir beide abgelesene Vektoren noch mit 29 multipliziert haben, um “schönere”, d.h. ganzzahlige Einträge zu erhalten.

d) Das Bild wird von den Spaltenvektoren von A aufgespannt. Um eine Basis zu ermitteln, schreiben wir diese als Zeilen in eine Matrix und führen solange elementare Zeilenumformungen durch, bis eine Zeilenstufenform erreicht ist.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -3 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann man ablesen, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Bildes von f sind.

Aufgabe 28 Seien die folgenden darstellenden Matrizen von linearen Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{7} & 1 & 2 & \pi \\ 8 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils die Dimension des Kerns und die Dimension des Bildes der zugehörigen linearen Abbildung an.

Lösung zu Aufgabe 28 *Bemerkung:* Die Dimension des Bildes und des Kerns einer

linearen Abbildung hängen durch die Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$n = \dim(\text{Bild}(f)) + \dim(\ker(f)),$$

zusammen, wobei n die Spaltenzahl der darstellenden Matrix ist. Daher genügt es jeweils, nur eine dieser Dimensionen zu bestimmen.

Alle Matrizen sind entweder schon in Zeilenstufenform oder lassen sich mit wenigen Umformungsschritten auf Zeilenstufenform bringen, die Anzahl der Nicht-Nullzeilen ist die Dimension des Bildes (=der Rang der linearen Abbildung), die Dimension des Kerns ergibt sich dann aus der obigen Dimensionsformel. Man beachte, dass die Matrix H nach dem Vertauschen der ersten beiden Zeilen und Umnummerierung der Koordinaten bereits in Zeilenstufenform vorliegt, also keine Rechnung notwendig ist.

Matrix	A	B	C	D	E	F	G	H
Dimension des Bildes	0	1	1	1	2	2	1	3
Dimension des Kerns	3	2	1	6	2	2	1	1

Aufgabe 29

- a) Beweisen Sie folgende, mit der geometrischen Summe verwandte, Summenformel:

$$\sum_{n=1}^k nq^n = \frac{kq^{k+2} - (k+1)q^{k+1} + q}{(q-1)^2}.$$

für $q \neq 1$. *Hinweis:* Benutzen Sie vollständige Induktion oder (kürzer) leiten Sie die Formel für die geometrische Summe nach q ab.

- b) Benutzen Sie die Formel, um für folgendes Beispiel aus der *Rentenrechnung mit linearer Dynamik* den Endwert zu bestimmen:

Auf ein Sparkonto werde zum Anfang des ersten Jahres €1000 eingezahlt, zum Anfang des zweiten Jahres €1010, zum Anfang des dritten Jahres €1020, d.h. jedes Jahr werden €10 mehr eingezahlt als im Vorjahr. Nach Ablauf jedes Jahres wird das Guthaben mit 5% verzinst. Wie hoch ist das Guthaben nach 25 Jahren?

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass für den Endwert nach k Jahren gilt, wenn a_0 die anfängliche Rate, d die jährliche Steigerung der Rate und q der Zinsfaktor ist:

$$\sum_{n=1}^k q^n (a_0 + d(k-n)).$$

Lösung zu Aufgabe 29

- a) *Beweis durch vollständige Induktion:* Für $k = 1$ ergibt die Summe auf der linken Seite q , die Formel auf der rechten Seite ist gleich

$$\frac{q^3 - 2q^2 + q}{(q-1)^2} = q.$$

Beim Übergang $k \rightarrow k+1$ kommt bei der Summe auf der linken Seite der Summand $(k+1)q^{k+1}$ hinzu. Wir berechnen

$$\begin{aligned} & \frac{kq^{k+2} - (k+1)q^{k+1} + q}{(q-1)^2} + (k+1)q^{k+1} = \\ &= \frac{kq^{k+2} - (k+1)q^{k+1} + q}{(q-1)^2} + \frac{(k+1)q^{k+1}(q^2 - 2q + 1)}{(q-1)^2} = \\ &= \frac{(k+1)q^{k+3} + (k-2(k+1))q^{k+2} + (-(k+1) + (k+1))q^k + q}{(q-1)^2} = \\ &= \frac{(k+1)q^{k+3} - (k+2)q^{k+2} + q}{(q-1)^2}, \end{aligned}$$

was genau die Formel auf der rechten Seite ist, mit k durch $k+1$ ersetzt.

Alternativer Beweis: Wir betrachten die Formel für die geometrische Summe

$$\sum_{n=0}^k q^n = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

als reelle Funktion in der Variablen q und leiten beide Seiten nach q ab:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k nq^{n-1} &= \frac{(1-q)(-(k+1)q^k) + 1 - q^{k+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{kq^{k+1} - (k+1)q^k + 1}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

Multiplizieren von beiden Seiten mit q ergibt die gewünschte Formel. (Man beachte, dass es keinen Unterschied macht, ob in der Summe auf der linken Seite die untere Summationsgrenze 0 oder 1 gewählt wird, da der erste Summand ohnehin Null ist.)

b) Für die angegebene Summe erhält man nach Teilaufgabe a) den Wert

$$\sum_{n=1}^k q^n (a_0 + d(k-n)) = (a_0 + kd)q \frac{1 - q^k}{1 - q} - d \frac{kq^{k+2} - (k+1)q^{k+1} + q}{(q-1)^2}.$$

Wir setzen nun ein

$$a_0 = 1000, \quad d = 10, \quad q = 1,05, \quad k = 25.$$

und erhalten für den Endwert

$$\begin{aligned} & (1000 + 25 \cdot 10) \cdot 1,05 \cdot \frac{1 - 1,05^{25}}{1 - 1,05} - 10 \cdot \frac{25 \cdot 1,05^{27} - 26 \cdot 1,05^{26} + 1,05}{(1,05 - 1)^2} \approx \\ & \approx 62641,82 - 7776,67 \approx 54886. \end{aligned}$$

Das Guthaben nach 25 Jahren beträgt also €54886.

Aufgabe 30 Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann injektiv,

wenn der Kern nur aus dem Nullvektor besteht. Gehen Sie dabei wie folgt in zwei Schritten vor:

- a) Nehmen Sie an, die Abbildung sei *nicht* injektiv, d.h. es gibt zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(v) = f(w)$ gilt. Was können Sie über $f(v - w)$ aussagen?
- b) Nehmen Sie an, es gibt einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor im Kern der Abbildung. Warum kann die Abbildung dann nicht injektiv sein?

Lösung zu Aufgabe 30

- a) Es gilt $f(v - w) = f(v) - f(w) = 0$. Da aber $v \neq w$, ist $v - w \neq 0$ und wir haben einen von Null verschiedenen Vektor im Kern von f gefunden, nämlich $v - w$.
- b) Die Abbildung ist dann nicht injektiv, da es dann mindestens zwei Vektoren gibt, die auf Null (und somit auf denselben Wert) abgebildet werden, denn stets gilt auch $f(0) = 0$.