Aufgabe 23 Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

Lösung zu Aufgabe 23 Wir geben jeweils die Umformungen der erweiterten Matrix $(A|E)$ zur Bestimmung der Inversen an, falls die Matrix invertierbar ist (dies zeigt insbesondere die Invertierbarkeit) bzw. nur die elementaren Zeilenumformungen von A, die zeigen, dass A nicht invertierbar ist.

a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgabe 24 Man sagt, eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ ist in *Parameterform* gegeben, wenn sie in der Form $g = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $p, v \in \mathbb{R}^3$ dargestellt wird. Man nennt dann p den *Aufpunkt* und v den Richtungsvektor.

Seien im $\mathbb{R}^3$ die drei Geraden g_i durch

$$p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei jeweils p_i der Aufpunkt und v_i der Richtungsvektor zu g_i ist.

a) Zeigen Sie, dass sich die Geraden g_1 und g_2 in einem Punkt schneiden und berechnen Sie diesen.
b) Zeigen, Sie dass die Geraden g_2 und g_3 zueinander windschief sind, d.h. dass sich nicht schneiden und auch nicht parallel sind.
c) Berechnen Sie den Abstand zwischen g_2 und g_3.

Lösung zu Aufgabe 24

a) Für den Schnittpunkt gilt: Es gibt ein t_1 und ein t_2, so dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -t_2 &= 2, \\ t_1 - 2t_2 &= 1, \\ -t_1 - t_2 &= 5. \end{aligned}$$

Addieren der zweiten Gleichung zur dritten ergibt nocheinmal die Gleichung $-3t_2 = 6$, die zur ersten Gleichung äquivalent ist (und weggelassen werden kann), was zeigt, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu dem System in Stufenform

$$\begin{aligned} t_1 - 2t_2 &= 1, \\ -t_2 &= 2, \end{aligned}$$

das genau eine Lösung hat, diese ist $t_1 = -3$, $t_2 = -2$. Der gesuchte Schnittpunkt ist somit

$$p_2 + t_2 v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Der entsprechende Ansatz wie bei a) führt auf

$$\begin{aligned} t_2 - t_3 &= 1, \\ 2t_2 - 3t_3 &= 2, \\ t_2 + t_3 &= -6. \end{aligned}$$

wir formen die zugehörige erweiterte Matrix um:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right),$$

was einem Gleichungssystem mit leerer Lösungsmenge entspricht. Die Geraden schneiden sich also nicht und sie sind auch nicht parallel, da die Richtungsvektoren offensichtlich keine Vielfachen voneinander sind.

c) Wir definieren eine Hilfsebene, die die Gerade g_2 enthält und eine Parallele zu g_3. Wir wollen diese in der *Hesseschen Normalform* beschreiben, d.h. durch eine Gleichung der Form $v \cdot x = c$, wobei v ein auf der Ebene senkrecht stehender Einheitsvektor sein soll. Dazu bestimmen wir zunächst einen Vektor, der auf beiden Richtungsvektoren v_2 und v_3 senkrecht steht, also $v_2 \cdot x = 0$ und $v_3 \cdot x = 0$ erfüllt, somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir formen dies um zu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Eine Lösung (eine genügt uns) ist $x = (-5, 2, 1)$. Ein möglicher Einheitsvektor ist $w = \frac{1}{\sqrt{30}}(-5, 2, 1)$. Wir setzen einen Punkt von g_2 (z.B. p_2) in das Skalarprodukt mit w, um c zu erhalten: $c = \frac{2}{\sqrt{30}}(-5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = \frac{2}{\sqrt{30}}$. Der Abstand von g_3 zu g_2 ist nun $|w \cdot p_3 - c| = |\frac{1}{\sqrt{30}}(-5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) - c| = |\frac{1}{\sqrt{30}}(-5 - 2)| = \frac{7}{\sqrt{30}}$.

Aufgabe 25 Seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^5$ gegeben.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob diese Vektoren linear unabhängig sind. Geben Sie eine Basis des von diesen Vektoren aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$ an.

Lösung zu Aufgabe 25 Wir bilden die Matrix, deren Zeilen die gegebenen 5 Vektoren sind und führen elementare Zeilenumformungen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren waren also nicht linear unabhängig. Eine Basis des von Ihnen aufgespannten Untervektorraums ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26 Beweisen Sie:

a) Die Schnittmenge zweier Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ ist wieder ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
b) Die Schnittmenge zweier affiner Unterräume des $\mathbb{R}^n$ ist wieder ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
c) Was gilt für die Vereinigungen?

Lösung zu Aufgabe 26

a) Seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Da beide Untervektorräume die Null enthalten, ist sie auch in der Schnittmenge enthalten, diese ist somit nicht leer. Seien nun $v, w \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt, dass sowohl v als auch w in U_1 und in U_2 enthalten sind. Da U_1 und U_2 Untervektorräume sind, gilt $v + w \in U_1$ und $v + w \in U_2$. Dies zeigt, dass $v + w$ in der Schnittmenge enthalten ist. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen der Untervektorraumeigenschaft von U_1 und U_2 liegt λv sowohl in U_1 als auch in U_2 und somit in der Schnittmenge.
b) Seien $x + U$ und $y + V$ zwei affine Unterräume. Wenn die Schnittmenge leer ist, dann ist nichts zu zeigen. Also nehmen wir an, $p \in (x + U) \cap (y + V)$. Dann gelten $x + U = p + U$ und $y + V = p + V$, denn $x - p \in U$ und $y - p \in V$. Es folgt, dass $(x + U) \cap (y + V) = p + (U \cap V)$ ist, was nach a) zeigt, dass es sich um einen affinen Unterraum handelt.
c) Vereinigungen sind im allgemeinen weder affine noch lineare Unterräume, z.B. ist die Vereinigung von x-Achse und y-Achse kein linearer und auch kein affiger Unterraum.