Aufgabe 18 Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden komplexen Polynome.

a) $P(x) = x^2 + 2x + 5$.

b) $Q(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} ix - \dfrac{\sqrt{3}}{8} i$.

c) $R(x) = x^4 + 1$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

b) Auch hier benutzen wir die Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} i \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}{2},$$

dazu müssen wir die Quadratwurzel aus der komplexen Zahl $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ziehen. Die Zahl hat den Betrag 1; der Winkel, den sie mit der x-Achse einschließt, ist gleich $120°$. Die Quadratwurzel ist also gleich $\cos(60°) + i\sin(60°)$ und wir erhalten somit als Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} i \pm \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

c) Wir substituieren zunächst $z = x^2$. Damit wird die zu lösende Gleichung zu $z^2 = -1$, diese hat die beiden Lösungen $\pm i$. Nun müssen wir noch die beiden Gleichungen $x^2 = \pm i$ lösen. Man erhält insgesamt vier Lösungen, nämlich

$$x_{1,2,3,4} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 19 Führen Sie jeweils eine Polynomdivision durch, d.h. stellen Sie das Polynom $P(x)$ in der Form $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ dar, so dass der Grad von $R(x)$ kleiner als der von $Q(x)$ ist.

a) $P(x) = x^5 + 8x^4 - 7x^3 - 9, \quad Q(x) = 2x^3 + 4x^2$.
b) $P(x) = 4x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1, \quad Q(x) = x^2 + 1$.
c) $P(x) = x^6 - 1, \quad Q(x) = x - 1$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $S(x) = \frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{19}{2}, \quad R(x) = 38x^2 - 9$

b) $S(x) = 4\,x^2 + 5\,x - 2, \quad R(x) = -6\,x + 3.$
c) $S(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad R(x) = 0.$

Aufgabe 20 Xaver, Yvonne und Zacharias sind zusammen 100 Jahre alt. Zacharias ist doppelt so alt wie Yvonne und 10 Jahre älter als Xaver. Wie alt sind die drei jeweils?

Lösung zu Aufgabe 20 Sei das Alter von Xaver, Yvonne und Zacharias mit x, y und z bezeichnet. Es sind drei lineare Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{cccrl} x & +y & +z & = & 100, \\ & 2y & -z & = & 0, \\ x & & -z & = & -10. \end{array}$$

Wir ziehen die erste von der dritten Zeile ab und die so entstandene dritte Zeile von der zweiten. Damit erhalten wir:

$$\begin{array}{cccrl} x & +y & +z & = & 100, \\ & & 5z & = & -220, \\ & -y & -2z & = & -110. \end{array}$$

Aus der mittlere Zeile erhalten wir $z = 44$, aus der dritten dann $y = 110 - 2 \cdot 44 = 22$, schließlich aus der ersten $x = 100 - 22 - 44 = 34$. Also ist Xaver 34 Jahre, Yvonne 22 Jahre und Zacharias 44 Jahre alt.

Aufgabe 21 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden reellen linearen Gleichungssysteme.

a) Im $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rrrrcl} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 2 \end{array}$$

b) Im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c) Im $\mathbb{R}^9$:

$$\begin{aligned} x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 21

a) Wir multiplizieren die zweite Zeile mit 2, die dritte mit 4.

$$\begin{array}{rrrrcl} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & = & -2 \\ 4x_1 & +8x_2 & +20x_3 & -8x_4 & = & 8 \end{array}$$

Nun ziehen wir die erste von der zweiten und der dritten Gleichung ab.

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -3x_2 & x_3 & x_4 & = & -3 \\ & +7x_2 & +23x_3 & -7x_4 & = & 7 \end{array}$$

Nun multiplizieren wir die zweiten Gleichung mit 7, die dritte mit 3.

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -21x_2 & 7x_3 & 7x_4 & = & -21 \\ & +21x_2 & +69x_3 & -21x_4 & = & 21 \end{array}$$

Wir addieren die zweite zur dritten Gleichung

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -21x_2 & 7x_3 & 7x_4 & = & -21 \\ & & +76x_3 & -14x_4 & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat nun Stufenform, x_1, x_2, x_3 sind die Pivotvariablen, wir setzen $x_4 = t$ und lösen auf. Wir erhalten aus der letzten Gleichung

$$x_3 = \frac{7}{38}t,$$

aus der zweiten

$$x_2 = 1 + \frac{7}{3 \cdot 38}t + \frac{1}{3}t = 1 + \frac{7+38}{3 \cdot 38}t = 1 + \frac{15}{38}t$$

und aus der ersten

$$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{15}{4 \cdot 38}t + \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 38} + t = \frac{-15 + 21 + 38}{4 \cdot 38}t = \frac{11}{38}t.$$

Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{11}{38} \\ 1 + \frac{15}{38}t \\ \frac{7}{38}t \\ t \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Wir subtrahieren zunächst die erste Zeile von der zweiten und addieren sie zur dritten:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \end{array}$$

Nun subtrahieren wir die zweite von der dritten Zeile:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_2 + x_3 & = & 4 \\ 0 & = & -2 \end{array}$$

Die letzte Gleichung ist nicht erfüllbar, die Lösungsmenge somit leer,

$$\mathbb{L} = \{\}.$$

c) Nach Vertauschen der beiden Gleichungen hat das System bereits Stufenform, die Pivotvariablen sind x_1 und x_4. Für die anderen führen wir die reellen Parameter $t_1, \dots, t_7$ ein und erhalten als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(1 - 4t_2, t_1, t_2, 1 + 2t_3, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7) \mid t_1, \dots, t_7 \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 22 Sei eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch eine Matrix A mit $f(x) = Ax$. Begründen Sie, warum folgende Aussagen gelten:

a) Ist $m < n$, dann ist f nicht injektiv.
b) Ist $m > n$, dann ist f nicht surjektiv.
c) Ist $m = n$, dann ist f genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist

Lösung zu Aufgabe 22 Bei dieser Aufgabe geht es darum, wie viele Urbilder ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ haben kann, d.h. um die Anzahl der Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Durch elementare Zeilenumformungen $(A|b) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow (\tilde{A}, \tilde{b})$ erhält man bei beliebiger rechter Seite ein äquivalentes System $(\tilde{A}, \tilde{b})$, so dass $\tilde{A}$ Zeilenstufenform hat.

a) Gilt $m < n$, ist also die Anzahl der Variablen größer als die Anzahl der Gleichungen, dann gibt es in einer Zeilenstufenform von A mindestens eine nicht-Pivotvariable und dann hat – zum Beispiel – die Gleichung $Ax = 0$ mehr als eine Lösung.
b) Gilt $m > n$, ist also die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Variablen, dann entsteht beim Umformen der erweiterten Matrix $(A|b) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow (\tilde{A}, \tilde{b})$ mindestens eine Nullzeile in $\tilde{A}$, sagen wir, die unterste Zeile von $\tilde{A}$ sei eine Nullzeile. Dann hat das Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ keine Lösung, wenn der letzte Eintrag von $\tilde{b}$ von Null verschieden ist. Die vorher durchgeführten elementaren Zeilenumformungen kann man nun rückgängig machen, um zu $(A|b)$ zu gelangen, so dass $Ax = b$ äquivalent zu $\tilde{A}x = \tilde{b}$ ist. Somit hat $Ax = b$ keine Lösungen.
c) Ist $m = n$, dann ist die Matrix A quadratisch. Sind alle Variablen Pivotvariablen in der Zeilenstufenform $\tilde{A}$, dann ist das System für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar (also die Abbildung f injektiv und surjektiv), falls nicht, dann sieht man analog wie in a) und b), dass f weder injektiv noch surjektiv sein kann.