Aufgabe 14 Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$a: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 6, 7\}, \quad 1 \mapsto 5, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 5$$

$$b: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 6, 7\}, \quad n \mapsto 8 - n$$

$$c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad n \mapsto n + 1$$

$$d: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$$

$$e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 14

- a ist weder injektiv (1 und 3 werden auf 5 abgebildet) noch surjektiv (7 liegt nicht im Bild).
- b ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv, denn eine Umkehrabbildung ist durch $\{5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $n \mapsto 8 - n$ gegeben.
- c ist injektiv, denn aus $n + 1 = m + 1$ folgt $n = m$, aber nicht surjektiv, denn die 0 und die 1 liegen nicht im Bild.
- d ist surjektiv, denn jede Zahl in $\mathbb{Q}$ lässt sich als $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ schreiben. Die Abbildung ist allerdings nicht injektiv, denn z.B. $(1, 2)$ und $(2, 4)$ haben dasselbe Bild.
- e ist weder surjektiv (e nimmt nur Werte im Intervall $[-1, 1]$ an) noch injektiv (z.B. gilt $\sin(0) = \sin(\pi)$).

Aufgabe 15 Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind linear?

- $f(x) = 5x$.
- $g(x) = 3x + 2$.
- $h(x) = |x|$.
- $k(x) = 0$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 15

- Die Abbildung f ist linear, denn es gilt nach dem Distributivgesetz $f(x + y) = 5(x + y) = 5x + 5y = f(x) + f(y)$ und außerdem $f(\lambda x) = 5\lambda x = \lambda f(x)$.
- Die Abbildung g ist nicht linear, denn z.B. gilt $g(1 + 1) = 8 \neq 10 = g(1) + g(1)$.
- Die Abbildung h ist nicht linear, denn z.B. gilt $h(1 + (-1)) = 0 \neq 2 = h(1) + h(1)$.

- d) Die Nullabbildung k ist linear, denn es gilt sowohl $f(x + y) = 0 = f(x) + f(y)$ als auch $f(\lambda x) = 0 = \lambda f(x)$.

Aufgabe 16 Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen der folgenden linearen Abbildungen.

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (5x_1 + 2x_2, x_2, x_1);$
 b) $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_5, x_1);$
 c) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$
 d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (1x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4).$

(Sie müssen die Linearität der Abbildungen nicht nachweisen.)

Lösung zu Aufgabe 16

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17

- a) Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bildet stets den Nullvektor auf den Nullvektor ab.
 b) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann linear, wenn

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

- c) Geben Sie alle linearen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die 1 auf 2 abbilden.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Der Nullvektor lässt sich als $0 \cdot v$ für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ schreiben. Es gilt: $f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$.

Alternativer Beweis: Jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist durch eine darstellende Matrix gegeben, d.h. es gibt eine reelle $m \times n$ -Matrix, so dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Also ist $f(0) = A0 = 0$.

b) Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

Angenommen, f sei linear. Dann folgt $f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v) + f(\beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$, wobei wir im ersten Schritt die Additivität benutzt haben und im zweiten Schritt die beiden Skalare α und β "herausgezogen" haben.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in \mathbb{R}$ gilt. Dann gilt dies insbesondere für $\alpha = \beta = 1$, womit $f(v + w) = f(1v + 1w) = 1f(v) + 1f(w) = f(v) + f(w)$ gezeigt ist und es gilt insbesondere auch für $\beta = 0$ und ein beliebiges w , womit $f(\alpha v) = f(\alpha v + 0w) = \alpha f(v) + 0f(w) = \alpha f(v) + 0 = \alpha f(v)$ folgt.

c) Nach der Vorlesung sind lineare Abbildungen durch ihre Werte auf den Standardbasisvektoren bereits eindeutig festgelegt, daher kann es nur eine solche Abbildung hier geben (1 ist der (einzige) Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^1$) und die einzige solche Abbildung ist somit $x \mapsto 2x$.

Alternativer Beweis: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, die 1 auf 2 abbildet. Dann gilt $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot 2$.