Aufgabe 10

a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + bi$ mit reellem a und b.

$$(1+2i)(-3+4i), \quad \frac{4i}{2+i}, \quad i^8, \quad (1+i)^{10}, \quad (1+\sqrt{3}i)^3.$$

b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten:

$$i, \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad (\cos(\tfrac{\pi}{13}) + i\sin(\tfrac{\pi}{13}))^{169}$$

c) Beweisen Sie dass für komplexe Zahlen z, w gilt:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

d) Rechnen Sie nach, dass für Beträge von komplexen Zahlen folgende Regeln gelten:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1}.$$

Lösung zu Aufgabe 10

a)

$$\begin{aligned}
(1+2i)(-3+4i) &= -3 - 8 + 4i - 6i = -11 - 2i, \\
\frac{4i}{2+i} &= \frac{4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{8i+4}{4+1} = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i \\
i^8 &= (i^2)^4 = (-1)^4 = 1, \\
(1+i)^{10} &= (\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})))^{10} = \\
&= 2^5 \cdot (\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}))^2 = \\
&= 32 \cdot (\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})) = 32i, \\
(1+i\sqrt{3})^3 &= 1 + 3 \cdot \sqrt{3}i - 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3}i = -8.
\end{aligned}$$

b)
- Die Zahl i lässt sich als $i = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$ mit $r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ schreiben.
- Die Zahl $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ hat den Betrag $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Damit ist der Winkel, den Sie mit der x-Achse einschließt, gleich $\arccos(\frac{1}{2}) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.
- Es gilt: $(\cos(\frac{\pi}{13}) + i\sin(\frac{\pi}{13}))^{169} = (\cos(\frac{169\pi}{13}) + i\sin(\frac{169\pi}{13})) = (\cos(13\pi) + i\sin(13\pi)) = -1$.

c) Sei $z = (a, b)$, $w = (c, d)$. Es gilt

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c, b+d)} = (a+c, -b-d) = (a, -b) + (c, -d) = \bar{z} + \bar{w}.$$

Außerdem

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd, ad+bc)} = (ac-bd, -ad-bc) = (a, -b) \cdot (c, -d) = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

d) Die erste Regel folgt z.B. aus $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$. Die zweite folgt sofort aus $|z \cdot w| = \sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}} = |z| \cdot |w|$. Schließlich ist $|z^{-1} \cdot z| = 1$, daraus folgt $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

Aufgabe 11 Rechnen Sie direkt anhand der Definition der Multiplikation komplexer Zahlen nach, dass das Assoziativgesetz dafür gilt, d.h. weisen Sie nach, dass

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

für alle reellen Zahlen a, b, c, d, e, f gilt.

Lösung zu Aufgabe 11 Wir berechnen die linke und rechte Seite der Behauptung getrennt, zunächst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = \\
&= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) = \\
&= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce).
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = \\
&= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) = \\
&= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass Assoziativität gilt.

Aufgabe 12

a) Berechnen Sie die Längen der folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$(1, 2, 2, 4), \quad (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), \quad (-1, 2, -2, 1)$$

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 1, 0), \quad (1, 0, 1).$$

Lösung zu Aufgabe 12

a)

$$\begin{aligned}
\|(1, 2, 2, 4)\| &= \sqrt{1 + 4 + 4 + 16} = 5, \\
\|(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\| &= \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = 1, \\
\|(-1, 2, -2, 1)\| &= \sqrt{1 + 4 + 4 + 1} = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

b) Dazu muss man die Vektoren auf Einheitslänge bringen, d.h. mit dem Kehrwert ihrer Länge multiplizieren. Beide Vektoren haben die Länge $\sqrt{2}$. Der Kosinus des Zwischenwinkels ist dann

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2} + 0 + 0 = \tfrac{1}{2}.$$

Der Winkel beträgt somit $\frac{\pi}{3} = 60°$.

Aufgabe 13 Weisen Sie nach, dass das Skalarprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ folgende Eigenschaften hat: Es ist *symmetrisch*, d.h. es gilt $v \cdot w = w \cdot v$ und *bilinear*, d.h. es gelten

$$\begin{aligned}
(u+v) \cdot w &= u \cdot w + v \cdot w, \\
(\lambda u) \cdot v &= \lambda(u \cdot v), \\
u \cdot (v+w) &= u \cdot v + u \cdot w, \\
u \cdot (\lambda v) &= \lambda(u \cdot v)
\end{aligned}$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 13 Die Symmetrie ist offensichtlich aus der Definition. Wir zeigen die ersten beiden Eigenschaften

$$\begin{aligned}
(u+v) \cdot w &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = \\
&= (u_1 + v_1)w_1 + \ldots + (u_n + v_n)w_n = \\
&= (u_1 w_1 + v_1 w_1) + \ldots + (u_n w_n + v_n w_n) = u \cdot w + v \cdot w.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\lambda u) \cdot v &= (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) \cdot v = \\
&\lambda u_1 v_1 + \ldots + \lambda u_n v_n = \\
&= \lambda(u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n) = \lambda(u \cdot v).
\end{aligned}$$

Die anderen beiden folgen aus diesen mit Hilfe der Symmetrie.