

Aufgabe 5 Leiten Sie folgende Aussagen aus den Körperaxiomen ab:

- a) In einem Körper gilt $a \cdot 0 = 0$.
- b) In einem Körper gibt es keine Nullteiler, d.h. in jedem Körper gilt: Ist $ab = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Lösung zu Aufgabe 5

- a) Aus dem Axiom über das neutrale Element der Addition folgt insbesondere $0+0 = 0$. Diese Gleichung multiplizieren wir mit a und erhalten $a(0+0) = a0$, woraus mit dem Distributivgesetz $a0 + a0 = a0$ folgt. Wir addieren das additive Inverse von $a0$ auf beiden Seiten und erhalten somit $(a0 + a0) - a0 = a0 - a0$. Durch Anwenden der Assoziativität der Addition auf der linken Seite und dann des Axioms vom additiven Inversen auf beiden Seiten erhalten wir schließlich $a0 + 0 = 0$ und somit $a0 = 0$, was zu zeigen war.
- b) Fallunterscheidung
Fall 1: $a = 0$. In diesem Fall ist nichts zu zeigen.
Fall 2: $a \neq 0$. In diesem Fall müssen wir zeigen, dass $b = 0$ gilt. Aus dem Axiom über die Existenz eines multiplikativen Inversen folgt, da wir $a \neq 0$ annehmen, dass es a^{-1} gibt. Wir multiplizieren die Gleichung $ab = 0$ (von links) mit a^{-1} und erhalten auf der linken Seite

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = (aa^{-1})b = 1b = b,$$

wobei in jedem Schritt nur jeweils insgesamt ein Körperaxiom verwendet wurde. Insgesamt folgt also $b = a0$, mit Teilaufgabe (a) erhalten wir $b = 0$.

Aufgabe 6 Begründen Sie, warum $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k -elementige Teilmengen einer n -elementigen Menge ist.

Lösung zu Aufgabe 6 Eine mögliche Begründung ist die folgende:

Man stellt sich vor, man entnimmt einer n -elementigen Menge nacheinander k Elemente. Für das erste Element hat man n Möglichkeiten, für das zweite Element hat man $n - 1$ Möglichkeiten, usw. Insgesamt hat man

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Möglichkeiten, k Elemente unter Beachtung der Reihenfolge aus der Menge zu entnehmen, oder, mit anderen Worten es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, aus den Elementen einer n -elementigen Menge k -Tupel ohne Wiederholungen zu bilden. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen erhält man, in dem man die obige Anzahl durch die Anzahl der Möglichkeiten,

k Objekte in verschiedenen Reihenfolgen zu bringen (nämlich $k!$) teilt. Insgesamt ergibt sich die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge somit zu

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 7 Wo ist der Fehler bei folgendem “Induktionsbeweis”?

Behauptung: “Alle natürlichen Zahlen sind zueinander gleich.” Wir beweisen dies, indem wir zeigen: In der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ sind für jedes n alle Zahlen zueinander gleich.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die Menge $\{1\}$ nur aus einem Element und dafür ist die Behauptung offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: Sei die Behauptung bereits für die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ gezeigt. Wir zeigen, dass dann $n + 1 = n$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt insbesondere $n = n - 1$. Durch Addieren von 1 auf beiden Seiten der Gleichung erhält man nun die Induktionsbehauptung $n + 1 = n$. Q.E.D.

Lösung zu Aufgabe 7 Der Fehler liegt im Induktionsschritt: Der Schluss der gezogen wird, nämlich dass $n = n + 1$ gilt, funktioniert nur, falls $n \geq 2$, d.h. falls die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ mehr als ein Element enthält, oder, mit anderen Worten, nur falls neben n auch die Zahl $n - 1$ in der Menge enthalten ist.

Aufgabe 8 Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$1001^5, \quad 99998^3.$$

Lösung zu Aufgabe 8

$$\begin{aligned} (1.001)^5 &= (1.000 + 1)^5 = \\ &= \binom{5}{0} 1.000^5 + \binom{5}{1} 1.000^4 + \binom{5}{2} 1.000^3 + \binom{5}{3} 1.000^2 + \binom{5}{4} 1.000^1 + \binom{5}{5} = \\ &= 1.000^5 + 5 \cdot 1.000^4 + 10 \cdot 1.000^3 + 10 \cdot 1.000^2 + 5 \cdot 1.000^1 + 1 = \\ &= 1.005.010.010.005.001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99998^3 &= (100.000 - 2)^3 = \\ &= 100.000^3 - 3 \cdot 100.000^2 \cdot 2 + 3 \cdot 100.000 \cdot 4 - 8 = \\ &= 1.000.000.000.000.000 - 60.000.000.000 + 1.200.000 - 8 = \\ &= 999.940.001.199.992 \end{aligned}$$

Aufgabe 9 Man beweise den binomischen Lehrsatz,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0,$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Lösung zu Aufgabe 9

Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{k=0}^0 \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 = (x + y)^0,$$

was zeigt, dass der binomische Lehrsatz für $n = 0$ richtig ist.

Induktionsschritt. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = \\ &= (x + y) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \\ &= x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k = \\ &= x^n + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k + y^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \end{aligned}$$