Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler im WS 2013/14
Lösungen zu den Übungsaufgaben (Vortragsübung) Blatt 1

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie:

$$\{1,2,3\} \cup \{3,4\}, \quad \{1,2,3\} \cap \{3,4\}, \quad \{1,2,3\} \setminus \{3,4\}, \quad \{1,2,3\} \times \{3,4\}.$$

b) Geben Sie alle Permutationen von $1, 2, 3, 4$ an.

c) Bestimmen Sie die Potenzmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\{1,2,3\} \cup \{3,4\} &= \{1,2,3,4\},\\
\{1,2,3\} \cap \{3,4\} &= \{3\},\\
\{1,2,3\} \setminus \{3,4\} &= \{1,2\}\\
\{1,2,3\} \times \{3,4\} &= \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}.
\end{aligned}$$

b) $1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321$. (Es sind $4! = 24$ Permutationen.)

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Pot}(\{1,2,3,4\}) = \{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\},\\
&\{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.
\end{aligned}$$

(Es sind $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Elemente).

Aufgabe 2 Wieviele Elemente haben die folgenden Mengen jeweils?

$$\{1,2,3\},\ \{1,2,3,2,1\},\ \{1,2,3\} \cup \{1,2,3\},\ \{1,2,3\} \cup \{\},\ \{1,2,3\} \cap \{\},$$
$$\{1,2,3\} \times \{\},\ \{1,2,3\} \times \{\{\}\},\ \{1\} \cap \{2\} \cap \{3\},\ \{(1,2,3)\},\ \{\{1,2,3\}\}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 2 Die Menge $\{1,2,3\}$ hat offensichtlich 3 Elemente, ebenso wie $\{1,2,3,2,1\}$, das mehrfache Aufzählen von Elementen in der Definition der Menge ändert nichts daran, dass jedes Element nur einmal enthalten sein kann, es handelt sich also um dieselbe Menge wie $\{1,2,3\}$; um eben diese Menge handelt es sich auch bei $\{1,2,3\} \cup \{1,2,3\}$ und $\{1,2,3\} \cup \{\}$ (Vereinigung der Menge mit sich selbst bzw. der leeren Menge. Die Menge $\{1,2,3\} \cap \{\}$ ist gleich der leeren Menge, enthält also null Elemente, ebenso wie $\{1,2,3\} \times \{\}$, da die zweite Menge leer ist, gibt es keine geordneten Paare (a,b) mit b aus der zweiten Menge. Die Menge $\{1,2,3\} \times \{\{\}\}$ hat drei Elemente, nämlich die Paare

$$(1, \{\}), (2, \{\}), (3, \{\}).$$

Die Schnittmenge $\{1\} \cap \{2\} \cap \{3\}$ ist leer. Die beiden Mengen $\{(1,2,3)\}$ haben $\{\{1,2,3\}\}$ jeweils ein Element, nämlich das Tripel $(1,2,3)$ bzw. die Menge $\{1,2,3\}$.

Aufgabe 3 Welche der folgenden Zahlen sind natürliche, ganze, rationale oder reelle Zahlen?

$$5, \quad \frac{1683}{187}, \quad \frac{437}{91}, \quad \sqrt{65536}, \quad \sqrt{3}, \quad 7{,}\bar{1}, \quad 0{,}101001000100001\ldots.$$

Lösung zu Aufgabe 3

- 5 ist eine natürliche Zahl.
- $\frac{1683}{187} = 9 \in \mathbb{N}$.
- $\frac{437}{91}$ ist eine rationale, keine ganze Zahl.
- $\sqrt{65536} = 256 \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl (verwende dasselbe Argument wie im Skript für $\sqrt{2}$).
- $7{,}\bar{1} = 7\frac{1}{9}$ ist eine rationale Zahl (periodischer Dezimalbruch).
- $0{,}101001000100001\ldots$ ist ein nicht-periodischer Dezimalbruch, also irrational.

Aufgabe 4

a) Welche Körperaxiome sind in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ erfüllt?
b) Ist die Subtraktion von ganzen Zahlen eine assoziative Verknüpfung?
c) Sei auf der Menge $\{0,1\}$ eine Addition definiert durch

$$0+0=0, \; 0+1=1, \; 1+0=1, \; 1+1=0.$$

Prüfen Sie nach, ob diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, ob es bezüglich dieser Verknüpfung ein neutrales Element gibt und ob es zu jedem Element ein inverses Element gibt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Da $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, gelten Kommutativ- und Assoziativgesetze und das Distributivgesetz. Von den anderen gelten in $\mathbb{N}$ nur, dass es bezüglich der Multiplikation ein neutrales Element gibt, und $\mathbb{Z}$ gelten alle Axiome, außer die Existenz eines inversen Elements bezüglich der Multiplikation.
b) Nein. Denn es gilt z.B. $(1-1)-1 \neq 1-(1-1)$.
c) Offensichtlich ist Verknüpfung kommutativ, denn es gilt $1+0 = 0+1$. Die Verknüpfung ist auch assoziativ, denn das Ergebnis einer mehrmaligen Verknüpfung hängt nur davon ab, ob eine gerade oder ungerade Zahl von Einsen addiert wurde. Offensichtlich ist 0 ein neutrales Element. Außerdem gilt wegen $0+0=0$ und $1+1=0$, dass jedes Element ein Inverses besitzt (sowohl 0 als auch 1 sind ihr eigenes Inverses.)