Aufgabe 43 Ist $(0, 0, 0)$ eine lokale Extremstelle von $f(x, y, z) := x^3 + y^2 + xyz + 2y$ auf $\mathbb{R}^3$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 + y = 0$?

Aufgabe 44 Ist $(1, -1, -1, 1)$ eine lokale Extremstelle von $f(x, y, z, w) := x^3 + y^3 + z^3 + w^3$ auf $\mathbb{R}^4$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z, w) := x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 4 = 0$ und $g_2(x, y, z, w) := xyz + yzw - 2 = 0$?

Aufgabe 45 Untersuchen Sie $f(x, y, z, w, v) := x^2 + y^2 + 2z - w^2 - v^2$ für positive x, y, z, w, v auf lokale Extremstellen unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z, w, v) := xyz - 4 = 0$ und $g_2(x, y, z, w, v) := zvw - 1 = 0$.

Aufgabe 46 Das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen x, y, z ist $f(x, y, z) = xyz$. Seine Oberfläche beträgt $a(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$. Seine Gesamtkantenlänge ist gegeben durch $k(x, y, z) = 4x + 4y + 4z$. Zeigen Sie, dass $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ eine lokale Maximalstelle der Volumenfunktion $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g_1(x, y, z) := a(x, y, z) - 6 = 0$ ist, d.h. unter der Nebenbedingung, dass die Oberfläche 6 beträgt.

Aufgabe 47 Für eine Dose von der Form eines Zylinders wird bei gegebenem Volumen nach dem minimalen Materialaufwand gefragt, d.h. nach der minimalen Oberfläche. Sei h die Höhe und r der Radius des Zylinders. Das vorgegebene Volumen ist $16\pi \text{ cm}^3$ (also $\approx 50 \text{ ml}$). Es genüge, eine lokale Minimalstelle für die Oberfläche zu finden.

(Hinweis: Das Volumen beträgt $\pi r^2 h$, die Oberfläche $2\pi(r^2 + rh)$.)