Aufgabe 35 Sei die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Begründen Sie, warum die Funktionen $x \mapsto f(x,y)$ und $y \mapsto f(x,y)$, die man erhält, wenn man f auf achsenparallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ einschränkt, stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.
b) Sei eine Folge im $\mathbb{R}^2$ definiert durch $a_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Konvergiert die Folge $f(a_k)$, und wenn ja, was ist der Limes?
c) Entscheiden Sie, ob f stetig ist.

Aufgabe 36 Sei

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3}.$$

Bestimmen Sie

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 1} f(x).$$

Aufgabe 37 In dieser Aufgabe befassen wir uns mit Kapitalentwicklung, wobei wir annehmen, dass ein Bankguthaben nach Ablauf eines Jahres jeweils mit einem Zinssatz von 5% verzinst wird. Wir betrachten drei verschiedene Fälle.

a) Am Anfang werden €10.000,– eingezahlt, es finden keine weiteren Zahlungen statt.
b) Am Anfang jedes Jahres werden €1.000,– eingezahlt, bei Anfangskapital null.
c) Mit einem anfänglichen Kapital von €10.000,– wird begonnen, am Anfang jedes Jahres werden €1.000,– eingezahlt.

Berechnen Sie in allen drei Fällen, nach wieviel Jahren erstmals das Guthaben den Betrag von €30.000,– übersteigt.

Aufgabe 38 Sei die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ gegeben, wobei $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie die Steigung
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
der Sekante an den Graphen von f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ für $x, x+h \neq 0$.
b) Begründen Sie mit Hilfe von a), warum f differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung f' an.
c) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(2, \frac{1}{2})$ an.