

Aufgabe 31 Welche Folgen sind konvergent?

a) $a_n = \frac{(n^2 + 1)(n^3 - 1)}{3n^5 - 4n^3},$

b) $b_n = \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + n},$

c) $c_n = \frac{n^2}{n + 3},$

d) $d_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2n}.$

Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 32 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Reihen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{7}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Aufgabe 33 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n) \sin(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 34

a) Sei eine reelle (oder komplexe) Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

gegeben. Zeigen Sie: Gibt es eine positive reelle Zahl $q < 1$, so dass der Quotient aufeinander folgender Reihenglieder a_{n+1}/a_n betragsmäßig durch q von oben beschränkt ist, so dass also

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| q^n$ eine konvergente Majorante.

b) Benutzen Sie a), um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$$

konvergiert.