

Aufgabe 27 Sei eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4, 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4, 3x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4)$$

- a) Geben Sie die darstellende Matrix A an.
- b) Bestimmen Sie jeweils das Urbild der Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

unter der linearen Abbildung f .

- c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f .
- d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f .

Aufgabe 28 Seien die folgenden darstellenden Matrizen von linearen Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{7} & 1 & 2 & \pi \\ 8 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils die Dimension des Kerns und die Dimension des Bildes der zugehörigen linearen Abbildung an.

Aufgabe 29

- a) Beweisen Sie folgende, mit der geometrischen Summe verwandte, Summenformel:

$$\sum_{n=1}^k nq^n = \frac{kq^{k+2} - (k+1)q^{k+1} + q}{(q-1)^2}.$$

für $q \neq 1$. *Hinweis:* Benutzen Sie vollständige Induktion oder (kürzer) leiten Sie die Formel für die geometrische Summe nach q ab.

- b) Benutzen Sie die Formel, um für folgendes Beispiel aus der *Rentenrechnung mit linearer Dynamik* den Endwert zu bestimmen:

Auf ein Sparkonto werde zum Anfang des ersten Jahres €1000 eingezahlt, zum Anfang des zweiten Jahres €1010, zum Anfang des dritten Jahres €1020, d.h.

jedes Jahr werden €10 mehr eingezahlt als im Vorjahr. Nach Ablauf jedes Jahres wird das Guthaben mit 5% verzinst. Wie hoch ist das Guthaben nach 25 Jahren?
Hinweis: Machen Sie sich klar, dass für den Endwert nach k Jahren gilt, wenn a_0 die anfängliche Rate, d die jährliche Steigerung der Rate und q der Zinsfaktor ist:

$$\sum_{n=1}^k q^n (a_0 + d(k - n)).$$

Aufgabe 30 Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann injektiv, wenn der Kern nur aus dem Nullvektor besteht. Gehen Sie dabei wie folgt in zwei Schritten vor:

- a) Nehmen Sie an, die Abbildung sei *nicht* injektiv, d.h. es gibt zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(v) = f(w)$ gilt. Was können Sie über $f(v - w)$ aussagen?
- b) Nehmen Sie an, es gibt einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor im Kern der Abbildung. Warum kann die Abbildung dann nicht injektiv sein?