Aufgabe 23 Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

Aufgabe 24 Man sagt, eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ ist in *Parameterform* gegeben, wenn sie in der Form $g = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $p, v \in \mathbb{R}^3$ dargestellt wird. Man nennt dann p den *Aufpunkt* und v den Richtungsvektor.

Seien im $\mathbb{R}^3$ die drei Geraden g_i durch

$$p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei jeweils p_i der Aufpunkt und v_i der Richtungsvektor zu g_i ist.

a) Zeigen Sie, dass sich die Geraden g_1 und g_2 in einem Punkt schneiden und berechnen Sie diesen.
b) Zeigen, Sie dass die Geraden g_2 und g_3 zueinander windschief sind, d.h. dass sich nicht schneiden und auch nicht parallel sind.
c) Berechnen Sie den Abstand zwischen g_2 und g_3.

Aufgabe 25 Seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^5$ gegeben.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob diese Vektoren linear unabhängig sind. Geben Sie eine Basis des von diesen Vektoren aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$ an.

Aufgabe 26 Beweisen Sie:

a) Die Schnittmenge zweier Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ ist wieder ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
b) Die Schnittmenge zweier affiner Unterräume des $\mathbb{R}^n$ ist wieder ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
c) Was gilt für die Vereinigungen?