

Aufgabe 18 Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden komplexen Polynome.

a) $P(x) = x^2 + 2x + 5.$

b) $Q(x) = x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}ix - \frac{\sqrt{3}}{8}i.$

c) $R(x) = x^4 + 1.$

Aufgabe 19 Führen Sie jeweils eine Polynomdivision durch, d.h. stellen Sie das Polynom $P(x)$ in der Form $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ dar, so dass der Grad von $R(x)$ kleiner als der von $Q(x)$ ist.

a) $P(x) = x^5 + 8x^4 - 7x^3 - 9, \quad Q(x) = 2x^3 + 4x^2.$

b) $P(x) = 4x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1, \quad Q(x) = x^2 + 1.$

c) $P(x) = x^6 - 1, \quad Q(x) = x - 1.$

Aufgabe 20 Xavier, Yvonne und Zacharias sind zusammen 100 Jahre alt. Zacharias ist doppelt so alt wie Yvonne und 10 Jahre älter als Xavier. Wie alt sind die drei jeweils?

Aufgabe 21 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden reellen linearen Gleichungssysteme.

a) Im $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rrrrr} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 2 \end{array}$$

b) Im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rrcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

c) Im $\mathbb{R}^9$:

$$\begin{array}{rcl} x_4 - 2x_5 & = & 1 \\ x_1 + 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 22 Sei eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch eine Matrix A mit $f(x) = Ax$. Begründen Sie, warum folgende Aussagen gelten:

- a) Ist $m < n$, dann ist f nicht injektiv.
- b) Ist $m > n$, dann ist f nicht surjektiv.
- c) Ist $m = n$, dann ist f genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist