

Aufgabe 14 Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$a: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 6, 7\}, \quad 1 \mapsto 5, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 5$$

$$b: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 6, 7\}, \quad n \mapsto 8 - n$$

$$c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad n \mapsto n + 1$$

$$d: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$$

$$e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 15 Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind linear?

- a) $f(x) = 5x$.
- b) $g(x) = 3x + 2$.
- c) $h(x) = |x|$.
- d) $k(x) = 0$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 16 Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen der folgenden linearen Abbildungen.

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (5x_1 + 2x_2, x_2, x_1)$;
- b) $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$;
- c) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$;
- d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (1x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$.

(Sie müssen die Linearität der Abbildungen nicht nachweisen.)

Aufgabe 17

- a) Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bildet stets den Nullvektor auf den Nullvektor ab.
- b) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann linear, wenn

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

- c) Geben Sie alle linearen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die 1 auf 2 abbilden.