

Aufgabe 10

- a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + bi$ mit reellem a und b .

$$(1 + 2i)(-3 + 4i), \quad \frac{4i}{2 + i}, \quad i^8, \quad (1 + i)^{10}, \quad (1 + \sqrt{3}i)^3.$$

- b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten:

$$i, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (\cos(\frac{\pi}{13}) + i \sin(\frac{\pi}{13}))^{169}$$

- c) Beweisen Sie dass für komplexe Zahlen z, w gilt:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

- d) Rechnen Sie nach, dass für Beträge von komplexen Zahlen folgende Regeln gelten:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1}.$$

Aufgabe 11 Rechnen Sie direkt anhand der Definition der Multiplikation komplexer Zahlen nach, dass das Assoziativgesetz dafür gilt, d.h. weisen Sie nach, dass

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

für alle reellen Zahlen a, b, c, d, e, f gilt.

Aufgabe 12

- a) Berechnen Sie die Längen der folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$(1, 2, 2, 4), \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad (-1, 2, -2, 1)$$

- b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 1, 0), \quad (1, 0, 1).$$

Aufgabe 13 Weisen Sie nach, dass das Skalarprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ folgende Eigenschaften hat: Es ist *symmetrisch*, d.h. es gilt $v \cdot w = w \cdot v$ und *bilinear*, d.h. es gelten

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w,$$

$$(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v),$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w,$$

$$u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.