Aufgabe 5 Leiten Sie folgende Aussagen aus den Körperaxiomen ab:

a) In einem Körper gilt $a \cdot 0 = 0$.
b) In einem Körper gibt es keine Nullteiler, d.h. in jedem Körper gilt: Ist $ab = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Aufgabe 6 Begründen Sie, warum $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge ist.

Aufgabe 7 Wo ist der Fehler bei folgendem "Induktionsbeweis"?

Behauptung: "Alle natürlichen Zahlen sind zueinander gleich." Wir beweisen dies, indem wir zeigen: In der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ sind für jedes n alle Zahlen zueinander gleich.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die Menge $\{1\}$ nur aus einem Element und dafür ist die Behauptung offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: Sei die Behauptung bereits für die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gezeigt. Wir zeigen, dass dann $n + 1 = n$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt insbesondere $n = n - 1$. Durch Addieren von 1 auf beiden Seiten der Gleichung erhält man nun die Induktionsbehauptung $n + 1 = n$. Q.E.D.

Aufgabe 8 Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$1001^5, \qquad 99998^3.$$

Aufgabe 9 Man beweise den binomischen Lehrsatz,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion.