

**Aufgabe 56**

- a) Bestimmen Sie die Flachstellen der Funktion  $f(x, y) = x + y$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .
- b) Bestimmen Sie die Flachstellen der Funktion  $f(x, y) = xy$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 2x + 2y - 4 = 0$ .

**Lösung zu Aufgabe 56**

- a) Zur Bestimmung der Flachstellen müssen wir das folgende Gleichungssystem in  $x, y, \lambda$  lösen

$$\begin{aligned}\nabla_f(x, y) &= \lambda \cdot \nabla_g(x, y) \\ g(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Die Gradienten berechnen sich zu

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}1 - 2\lambda x &= 0 \\ 1 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht-linear! Aus der ersten oder zweiten Gleichung erhalten wir  $\lambda \neq 0$ . Außerdem folgt durch Gleichsetzen  $1 - 2\lambda x = 1 - 2\lambda y$  bzw. nach Kürzen  $x = y$ . Dies eingesetzt in die dritte Gleichung liefert

$$x^2 = \frac{1}{2}.$$

Es ist also  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  und die Flachpunkte sind

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

- b) Die Gradienten berechnen sich zu

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \nabla_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}y &= 2\lambda \\ x &= 2\lambda \\ x + y - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Gleichsetzen der ersten beiden Gleichungen liefert  $x = y$ . Dies eingesetzt in die dritte Gleichung liefert  $x = 1$ . Es ist also  $(1, 1)$  ein Flachpunkt.

**Aufgabe 57** Berechnen Sie die folgenden Funktionengrenzwerte.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^3+x^2-4x-4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

**Lösung zu Aufgabe 57** Die Funktion  $\frac{e^x}{\cos(x)}$  ist in  $x=0$  definiert. Der Grenzwert ergibt sich also gerade durch Einsetzen von  $x=0$  zu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{e^0}{\cos(0)} = 1.$$

In den anderen Fällen werden im Grenzübergang sowohl Zähler als auch Nenner entweder beide 0 oder  $\pm\infty$ . Für die zweite Funktion berechnet sich der Grenzwert zu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Die verbleibenden drei Grenzwerte behandeln wir mit der Regel von L'Hospital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}. \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^3+x^2-4x-4} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2-8x+1}{3x^2+2x-4} = \frac{12}{-3} = -4. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

## Aufgabe 58

- Finden Sie eine Funktion  $y = f(x)$  welche die Differentialgleichung  $y' = yx$  erfüllt.
- Finden Sie eine Funktion  $y = f(x)$  welche die Differentialgleichung  $y' = x/y$  erfüllt.
- Finden Sie eine Funktion  $y = f(x)$  welche die Differentialgleichung  $y' = x^2 e^{-y}$  erfüllt.

## Lösung zu Aufgabe 58

- Separation der Variablen liefert

$$\begin{aligned} y' &= yx \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= yx \Leftrightarrow \\ \frac{1}{y} dy &= x dx. \end{aligned}$$

Wir integrieren auf beiden Seiten.

$$\begin{aligned} \int_c^y \frac{1}{u} du &= \int_{c'}^x u du \Leftrightarrow \\ \ln(y) &= \frac{1}{2}x^2 + K \Leftrightarrow \\ y &= e^{\frac{1}{2}x^2 + K}, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $c, c', K$ .

- b) Separation der Variablen liefert  $y \, dy = x \, dx$  und nach Integration auf beiden Seiten die Gleichung  $y^2 = x^2 + K$ . Es ist also  $y = \sqrt{x^2 + K}$  oder  $y = -\sqrt{x^2 + K}$ .
- c) Separation der Variablen liefert  $e^y \, dy = x^2 \, dx$  und nach Integration auf beiden Seiten die Gleichung  $e^y = \frac{1}{3}x^3 + K$ . Es ist also  $y = \ln(\frac{1}{3}x^3 + C)$ .