Aufgabe 50 Welche der folgenden Matrizen sind positiv bzw. negativ definit?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 27 & 17 & -8 & 91 \\ 17 & 41 & 13 & -3 \\ -8 & 13 & -103 & \pi \\ 91 & -3 & \pi & 11 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 50 Die Hauptminoren der Matrix A ergeben sich zu $2, 15$ und 25. Also ist A positiv definit.
Die Hauptminoren der Matrix B ergeben sich zu $-3, 8$ und -16. Also ist B negativ definit.
Die Matrix C ist weder positiv noch negativ definit, da die Elemente auf der Hauptdiagonalen nicht alle dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgabe 51

a) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$. Entscheiden Sie, ob $(\pi/2, 0)$ ein lokales Maximum oder Minimum von f ist.
b) Gegeben sei die Funktion $g(x, y) = (x + y) \cdot e^{-x^2-y^2}$. Zeigen Sie, dass $(1/2, 1/2)$ ein lokales Maximum der Funktion g ist. Finden Sie ein lokales Minimum von g.

Lösung zu Aufgabe 51

a) Der Gradient von f ist

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\nabla_f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix berechnet sich zu

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$H_f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Hauptminoren -1 und 1. Die Hesse-Matrix ist im Punkt $(\pi/2, 0)$ also negativ definit und es liegt dort ein lokales Maximum vor.

b) Der Gradient von g ist

$$\nabla_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - 2xy - 2x^2 \\ 1 - 2xy - 2y^2 \end{pmatrix}.$$

Da die e-Funktion keine Nullstellen hat ist der Gradient genau dann gleich Null wenn

$$1 - 2xy - 2x^2 = 0, \qquad 1 - 2xy - 2y^2 = 0.$$

Der Punkt $(x,y)=(1/2,1/2)$ erfüllt diese Gleichungen. Die Hessematrix berechnet sich zu

$$\begin{aligned} H_g(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^3+4x^2y-6x-2y & 4x^2y+4y^2x-2x-2y \\ 4x^2y+4y^2x-2x-2y & 4y^3+4y^2x-6y-2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese ausgewertet im Punkt $(1/2,1/2)$ ergibt

$$H_g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

mit den Hauptminoren $-3e^{-\frac{1}{2}}$ und $8e^{-\frac{1}{2}}$. Die Matrix ist also negativ definit und $(1/2,1/2)$ ein lokales Maximum von g.
Der Punkt $(-1/2,-1/2)$ ist ebenfalls eine Nullstelle des Gradienten. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist

$$H_g\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit den Hauptminoren $3e^{-\frac{1}{2}}$ und $8e^{-\frac{1}{2}}$. Es liegt also ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 52 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2+xz+3z+1.$$

a) Bestimmen Sie den Punkt (x_1,y_1,z_1) mit $\nabla_f(x_1,y_1,z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Entscheiden Sie ob es sich bei (x_1,y_1,z_1) um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

Lösung zu Aufgabe 52

a) Wir berechnen den Gradient $\nabla_f(x,y,z)$ und setzen diesen gleich Null.

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 4y \\ x+2z+3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x+z &= 0 \\ 4y &= 0 \\ x+2z &= -3. \end{aligned}$$

Der Gaußalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I. \leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.-2\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die eindeutige Lösung $x_3=-2, x_2=0, x_1=-3-2\cdot x_3=1$.

b) Die Hesse-Matrix im Punkt $(1,0,-2)$ berechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,0,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,0,-2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(1,0,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,0,-2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,0,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,0,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}(1,0,-2). \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

mit den Hauptminoren

$$\det(2) = 2, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 12.$$

Also ist die Matrix positiv definit und der Punkt $(1,0,-2)$ ein lokales Minimum von f.

Aufgabe 53

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von $f(x) = \ln(1+x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von $g(x) = \frac{1}{1-x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 53

a) Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k.$$

Die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rcrcrcr} f^{(0)}(x) & = & \ln(1+x) & \to & \ln(1+0) & = & 0 \\ f^{(1)}(x) & = & \frac{1}{1+x} & \to & \frac{1}{1+0} & = & 1 \\ f^{(2)}(x) & = & -\frac{1}{(1+x)^2} & \to & -\frac{1}{(1+0)^2} & = & -1 \\ f^{(3)}(x) & = & \frac{2}{(1+x)^3} & \to & \frac{2}{(1+0)^3} & = & 2 \end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

als Taylorpolynom vom Grad 3 für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$. Tatsächlich gilt sogar fü $|x| < 1$ die Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

b) Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k.$$

Die Ableitungen $g^{(k)}(0)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rclcccl} g^{(0)}(x) & = & \frac{1}{1-x} & \to & \frac{1}{1-0} & = & 1 = 0! \\ g^{(1)}(x) & = & \frac{1}{(1-x)^2} & \to & \frac{1}{(1-0)^2} & = & 1 = 1! \\ g^{(2)}(x) & = & -\frac{2}{(1-x)^3} & \to & \frac{2}{(1-0)^3} & = & 2 = 2! \\ g^{(3)}(x) & = & \frac{6}{(1-x)^4} & \to & \frac{6}{(1-0)^4} & = & 6 = 3! \end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

als Taylorpolynom vom Grad 3 für die Funktion $g(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$. Für $|x| < 1$ erhalten wir die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Aufgabe 54

a) Gegeben sei das Polynom $f(x) = x^3 - a$ mit $0 < a \in \mathbb{R}$. Wo liegt die Nullstelle von f? Ist das Newtonverfahren zur Berechnung der Nullstelle stets anwendbar?
b) Approximieren Sie $\sqrt[3]{2}$ mit dem Newtonverfahren.

Lösung zu Aufgabe 54

a) Die Nullstelle von f ist $\sqrt[3]{a} > 0$. Die Ableitungen von f sind

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x.$$

Es ist also $f'(x), f''(x) > 0$ für $x > 0$. Wenn wir also hinreichend nahe an der Nullstelle $\sqrt[3]{a}$ starten, konvergiert das Newtonverfahren.
b) Wir müssen die Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 2$ berechnen. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2$. Wir starten mit $x_0 = 2$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{3}{2} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{35}{27} \\ x_3 &= \frac{125116}{99225} = 1{,}2609\ldots \end{aligned}$$

Zum Vergleich: $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$

Aufgabe 55 Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi} 2x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung zu Aufgabe 55 Es ist $-\frac{1}{2}e^{-2x}$ eine Stammfunktion von e^{-2x}. Das erste Integral berechnet sich also zu

$$\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right).$$

Das zweite Integral lösen wir durch die Substitution $u = x^2$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$ bzw. $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ und damit

$$\int_0^{\pi} 2x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi^2} \cos(u)\,\mathrm{d}u = [\sin(u)]_{u=0}^{u=\pi^2} = \sin(\pi^2).$$

Alternativ kann man auch direkt die Stammfunktion $\sin(x^2)$ von $2x\cos(x^2)$ einsetzen.
Das dritte Integral lösen wir durch partielle Integration. Wir setzen

$$f(x) = x, \qquad f'(x) = 1, \qquad g(x) = \sin(x), \qquad g'(x) = \cos(x)$$

und erhalten

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x) + \cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = -2.$$

Man rechnet leicht nach, dass $x\sin(x)+\cos(x)$ tatsächlich eine Stammfunktion von $x\cos(x)$ ist.