Aufgabe 43 Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit dem Gauß-Algorithmus und mit der Regel von Sarrus (Jägerzaunregel).

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 43 Wir bringen die Matrix mit dem Gaußalgorithmus auf Zeilenstufenform und merken uns für jede Zeilenvertauschung einen Faktor -1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1]{I.\leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I.+III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-3\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-1]{II.\leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-5\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ergibt sich als Produkt der Diagonalelemente multipliziert mit den Faktoren -1, die wir uns gemerkt haben. Es ergibt sich also als Determinante

$$1 \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 4.$$

Alternativ berechnet sich die Determinante nach Sarrus zu

$$5 \cdot 3 \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot (-4) + (-6) \cdot 3 \cdot 0 - (-6) \cdot 3 \cdot (-4) - 5 \cdot 0 \cdot 5 - 8 \cdot 1 \cdot 3 = 4.$$

Aufgabe 44 Lösen Sie die beiden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 44 Wir stellen jeweils die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen diese mit dem Gaußalgorithmus auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-2\cdot I.} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.+II.} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{I.-III.} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot II.} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{I.-III.} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Lösung

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 0.$$

Für das zweite Gleichungssystem erhalten wir für die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I.\leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-3\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III.-4\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot II.;\ 3\cdot III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & -2 \\ 0 & -6 & -30 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III.-II.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -20 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{20}\cdot III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II.+10\cdot III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}\cdot II.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I.-2\cdot III.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \xrightarrow{I.-II.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Lösung

$$x_1 = \frac{13}{20}, \qquad x_2 = \frac{1}{4}, \qquad x_3 = \frac{1}{20}$$

Aufgabe 45 Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln

$$1002^2, \qquad 997 \cdot 1003, \qquad 1{,}02^3$$

Lösung zu Aufgabe 45

$$\begin{aligned} 1.002^2 &= (1.000+2)^2 = 1.000.000 + 4.000 + 4 = 1.004.004 \\ 997 \cdot 1.003 &= (1.000-3)\cdot(1.000+3) = 1.000.000 - 9 = 999.991 \\ 1{,}02^3 &= (1+0{,}02)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 1 \cdot 0{,}02^2 + 0{,}02^3 = 1{,}061208 \end{aligned}$$

Aufgabe 46 Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2; \qquad g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z^2; \qquad h\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ (z,n) \mapsto \frac{z}{n}.$$

Lösung zu Aufgabe 46 f ist injektiv, aber nicht surjektiv. g ist weder injektiv noch surjektiv. h ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 47 Welche Folgen sind konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{n^2+4n}{2(n+1)^2}, \qquad b_n = \frac{(n+3)^2}{(n+2)^3}, \qquad c_n = \frac{n^2}{\ln(2^n)}, \qquad d_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}.$$

Lösung zu Aufgabe 47

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2+4n}{2(n+1)^2} = \frac{n^2+4n}{2n^2+4n+2} = \frac{1+\frac{4}{n}}{2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} \to \frac{1}{2} \\
b_n &= \frac{(n+3)^2}{(n+2)^3} = \frac{n^2+6n+9}{n^3+6n^2+12n+8} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{9}{n^3}}{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{8}{n^3}} \to \frac{0}{1} = 0 \\
c_n &= \frac{n^2}{\ln(2^n)} = \frac{n^2}{n\ln(2)} = \frac{n}{\log(2)} \to \infty \\
d_n &= \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 48 In ein Bankkonto werden am Anfang jedes Jahres 1.000 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit $p\%$ verzinst, $p \in [0, 100]$.

a) Nach 2 Jahren beträgt das Guthaben 2.152,5 €. Wie hoch ist der Zinssatz p?
b) Wie hoch ist das Guthaben nach 20 Jahren?
c) Wie hoch müsste die jährliche Einzahlung mindestens sein, wenn das Guthaben nach 20 Jahren mindestens 50.000 € betragen soll?

Lösung zu Aufgabe 48

a) Ist p der Zinssatz, dann ist $q = 1 + p$ der Zinsfaktor. Das Guthaben nach 2 Jahren beträgt dann

$$2.152,5 = 1.000 \cdot (1+p) \cdot \frac{1-(1+p)^2}{1-(1+p)} = 1.000 \cdot (2+3p+p^2).$$

Wir erhalten die quadratische Gleichung

$$p^2 + 3p - 0{,}1525 = 0.$$

Deren positive Lösung ist $p = 0{,}05$.

b) Nach 20 Jahren beträgt das Guthaben

$$1.000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1-1{,}05^{20}}{1-1{,}05} = 34.719{,}25\ldots.$$

c) Es bezeichne a die jährliche Einzahlung. Wir erhalten die Ungleichung

$$50.000 \leq a \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1-1{,}05^{20}}{1-1{,}05}$$

und diese aufgelöst nach a ergibt

$$a \geq 1.440{,}12\ldots.$$

Aufgabe 49 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos(n)}.$$

Lösung zu Aufgabe 49 Die Summanden einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge. Daher sind die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos(n)}$ nicht konvergent.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ konvergiert, denn es ist $\frac{1}{(2n!)} < \frac{1}{n!}$. Die Konvergenz folgt daher aus dem Majorantenkriterium im Vergleich mit der Exponentialreihe.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergiert gegen e^2 (vgl. Exponentialfunktion).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert nicht. Würde diese Reihe konvergieren, so wäre sie wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ eine konvergente Majorante fü die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, welche aber bekanntlich divergent ist.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ ist wegen $\frac{1}{2^{2n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ eine geometrische Reihe mit Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.