Aufgabe 39 Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der darstellenden Matrix A. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Bilder der Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zeichnen Sie diese.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 39 Die Bilder der Vektoren e_1, e_2 sind gerade die Spalten der darstellenden Matrix A.

a) beide Vektoren werden um den Faktor 2 gestreckt (Streckung)
b) beide Vektoren werden um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht (Drehung)
c) der Vektor e_1 wird auf sich selbst abgebildet, der Vektor e_2 wird um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt und um 45° im Uhrzeigersinn gedreht (Drehstreckung)
d) der Vektor e_1 wird auf den Nullpunkt abgebildet, der Vektor e_2 auf sich selbst (Projektion auf die y-Achse)

Aufgabe 40 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Ermitteln Sie gegebenenfalls die darstellende Matrix (Hinweis: Betrachten Sie die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2)

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x - 4y$
b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$
c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ y-x \end{pmatrix}$
d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x + 3xy$
e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix}$
f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto |x| + |y|$

Lösung zu Aufgabe 40

a) Linear mit der darstellenden Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}$.

b) Nicht linear, denn es ist für $\lambda \neq 1$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f(x,y) &= \lambda \cdot (x+1, y+1) \\ &= (\lambda x + \lambda, \lambda y + \lambda) \\ &\neq (\lambda x + 1, \lambda y + 1) \\ &= f(\lambda x, \lambda y). \end{aligned}$$

c) Linear mit der darstellenden Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Nicht linear, denn f ist nicht additiv. Es ist etwa $f(1,1) = 5 \neq 2 = f(1,0) + f(0,1)$.

e) Linear mit der darstellenden Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f) Nicht linear, denn für $\lambda < 0$ ist

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f(x,y) &= \lambda |x| + \lambda |y| \\ &\neq |\lambda||x| + |\lambda||y| \\ &= f(\lambda x, \lambda y). \end{aligned}$$

Aufgabe 41 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 &= 4. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 41

a) Lösung mittels Einsetzungsverfahren: Wir lösen die letzte Gleichung nach x_1 auf und setzen diesen Wert in die beiden anderen Gleichungen ein. Es ist

$$x_1 = 2$$

und wir erhalten das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4 - x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Wir lösen die letzte Gleichung nach x_2 auf und erhalten

$$x_2 = 3.$$

Diesen Wert eingesetzt in die erste Gleichung ergibt

$$5 + x_3 = 4,$$

bzw. $x_3 = -1$.

b) Lösung mittels Gleichsetzungsverfahren: Wir lösen beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzen gleich. Es ist

$$\begin{aligned} 2x_1 &= -4x_2 - 4 \\ 2x_1 &= -3x_2 + 4. \end{aligned}$$

Also folgt

$$-4x_2 - 4 = -3x_2 + 4,$$

bzw. $x_2 = -8$. Diesen Wert eingesetzt in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ergibt $x_1 = 14$.

c) Dieses System hat keine Lösung. Multipliziert man die erste Gleichung mit 2 erhält man die falsche Gleichung $-6 = 6$.

Aufgabe 42

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Es seien $0_n = (0, \dots, 0)^t$ bzw. $0_m = (0, \dots, 0)^t$ die Nullvektoren im R^n bzw. R^m. Zeigen Sie

$$f(0_n) = 0_m.$$

b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, das die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

als Lösungsmenge hat.

Lösung zu Aufgabe 42

a) Es ist $0_n = 0_n + 0_n$. Daher ist mit der Linearität von f auch $f(0_n) = f(0_n) + f(0_n) = 2f(0_n)$. Diese Gleichung gilt für jede Komponente des Vektors $f(0_n)$. Also ist jede solche Komponente gleich Null (ansonsten erhielte man durch Kürzen die falsche Gleichung $1 = 2$). Es ist also $f(0_n) = 0_m$.

b) Ein Punkt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

liegt genau dann auf g, wenn die beiden Gleichungen

$$x_1 = 1 + 2t \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - t$$

für ein $t \in \mathbb{R}$ erfüllt sind, diese sind zu

$$t = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t = 1 - x_2$$

äquivalent. Nun kann man das t eliminieren und erhält die Gleichung

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} = 1 - x_2 \iff \frac{1}{2}x_1 + x_2 = \frac{3}{2},$$

deren Lösungsmenge genau g ist.