Aufgabe 35 Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x - 1$.

a) Hat f eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$?
b) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Newtonverfahrens zum Startwert $x_0 = 0$.
c) Konvergiert das Verfahren in b)? Falls nein, begründen Sie, warum nicht.

Lösung zu Aufgabe 35

a) Wegen $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$ hat f eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$.
b) Wir wenden zunächst das Newtonverfahren an, ohne vorher die Vorraussetzungen zu überprüfen. Es ist $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$. Mit $x_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{1} = 1 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

Also ist $x_2 = x_0$ und damit auch $x_3 = x_1 = 1$.
c) Das Verfahren konvergiert nicht, sondern pendelt stets zwischen den Werten 0 und 1. So ist zwar im Intervall $[0, 1]$ stets $f'(x) > 0$, aber dies gilt nicht für die zweite Ableitung. Es ist $f''(x) = -12x^2 + 4 < 0$ wenn wir x nahe bei 1 wählen (etwa $x = \frac{3}{4}$).

Aufgabe 36 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - x - 1$. Wir wollen die positive reelle Nullstelle von f mit dem Newtonverfahren approximieren.

a) Bestimmen Sie ein Intervall $[a, b]$ mit $0 \leq a < b$ welches eine Nullstelle von f enthält.
b) Prüfen Sie, ob das Newtonverfahren in diesem Intervall anwendbar ist und berechnen Sie die ersten drei Iterierten.
c) Die positive Nullstelle von f ist $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Vergleichen Sie die Näherung mit dem exakten Wert der Nullstelle.

Lösung zu Aufgabe 36

a) Wir setzen in f verschiedene Werte für x ein und untersuchen, ob f das Vorzeichen wechselt. Es gilt $f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$. Also muss im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle von f liegen.
b) Es ist $f'(x) = 2x - 1$. Also ist $f'(x) > 0$ für $x > \frac{1}{2}$, insbesondere gilt dies also im Intervall $[1, 2]$. Für die zweite Ableitung erhält man $f''(x) = 2$ und somit stets $f''(x) > 0$. Wir können also das Newtonverfahren anwenden. Wir wählen als Startwert $x_0 = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{1} = 2 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{5}{3} - \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{34}{21}. \end{aligned}$$

c) Der numerische Wert der Nullstelle beträgt $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803\ldots$. Der numerische Wert unserer Näherung beträgt $\frac{34}{21} = 1{,}61904\ldots$.

Aufgabe 37

a) Berechnen Sie das folgende Matrixprodukt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Spiegelt man die Einträge einer Matrix A an der Diagonalen erhält man eine neue Matrix, genannt die Transponierte A^t von A, z.B. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Bilden Sie von den beiden Matrizen aus Aufgabe a) die Transponierten und berechnen Sie dann deren Produkt. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe a).

c) Zeigen Sie: Für das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ zweier Vektoren x, y gilt

$$\langle x, y \rangle = x^t y.$$

Lösung zu Aufgabe 37

a) Das Produkt berechnet sich zu $\begin{pmatrix} 17 & 3 & 10 \\ 16 & 4 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 12 \\ 12 & 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Vertauscht man allerdings die Reihenfolge der Faktoren ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 & 12 \\ 3 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix},$$

also gerade die transponierte Matrix aus a). Allgemein gilt für das Produkt AB von Matrizen A, B die Gleichung

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

c) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x^t y = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \langle x, y \rangle.$$

Aufgabe 38 Gegeben seien die folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche Produkte von jeweils zwei der obigen Matrizen sind definiert?
b) Berechnen Sie $B \cdot C$ und $C \cdot B$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.
c) Welche multiplikative Eigenschaft hat die Matrix I_3? (Bestimmen Sie hierzu einige Produkte von I_3 mit anderen der obigen Matrizen)
d) Wir vertauschen in I_3 die zweite und dritte Spalte. Diese neue Matrix nennen wir

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot E$ und $E \cdot A$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Matrix A.

Lösung zu Aufgabe 38

a) Die Anzahl der Spalten des ersten Faktors muss mit der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors übereinstimmen. Daher sind genau folgende Produkte definiert:

$$AA, AB, AI_3, BC, CA, CB, CI_3, I_3A, I_3B, I_3I_3.$$

b) Es ist

$$BC = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 4 \\ 7 & 0 & 14 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 23 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $BC \neq CB$.

c) Die Matrix I_3 lässt bei Links- und bei Rechtsmultiplikation ihren Beifaktor unverändert. So ist etwa

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allgemein heit die $n \times n$ Matrix I_n, auf deren Diagonalen nur Einsen stehen und deren sonstige Einträge alle Null sind, die Einheitsmatrix. Für eine Matrix M gilt stets $MI_n = I_nM = M$, wann immer das Produkt definiert ist.

d) Es ist

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix E bewirkt bei Multiplikation von rechts eine Vertauschen der zweiten und dritten Spalte von A. Vertauscht man die Faktoren ergibt sich

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bei Multiplikation von links vertauscht E also die zweite und dritte Zeile von A. Insbesondere ist also auch die Multiplikation von quadratischen Matrizen nicht notwendig kommutativ.