Aufgabe 31 Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration.

a) $\int_0^1 x^2 e^x \, \mathrm{d}x.$
(Hinweis: Integrieren Sie zweimal partiell).

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x.$
(Hinweis: Nutzen Sie nach der part. Integration die Identität $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$).

c) $\int_1^e \ln(x) \, \mathrm{d}x.$
(Hinweis: $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$).

Lösung zu Aufgabe 31 Die Formel für die partielle Integration lautet

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x.$$

a) Wir setzen zunächst $f(x) = x^2$ und $g'(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = 2x, g(x) = e^x$ und wir erhalten

$$\int_0^1 x^2 e^x \, \mathrm{d}x = \left[x^2 e^x\right]_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 x e^x \, \mathrm{d}x.$$

Das verbleibende Integral integrieren wir wieder partiell. Dabei setzen wir jetzt $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = 1, g(x) = e^x$ und wir erhalten

$$\int_0^1 x e^x \, \mathrm{d}x = [xe^x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = [xe^x - e^x]_{x=0}^{x=1}.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$\int_0^1 x^2 e^x \, \mathrm{d}x = \left[x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_{x=0}^{x=1} = e - 2.$$

b) Wir setzen $f(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = \cos(x)$. Dann ist $f'(x) = -\sin(x), g(x) = \sin(x)$ und wir erhalten

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = [\cos(x)\sin(x)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite wird Null. Für das verbleibende Integral nutzen wir die Formel $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ und erhalten

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$$

bzw.

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Der gesuchte Wert des Integral ergibt sich also zu $\frac{\pi}{2}$.

c) Wir setzen $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 1$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln(x)x - x]_{x=1}^{x=e} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 32 Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Substitution.

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: Man setze $x = \sin(t)$).

Lösung zu Aufgabe 32

Die Formel für die Integration durch Substitution lautet

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Wir setzen $f(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$ und können direkt die Formel anwenden, indem wir diese von rechts nach links lesen:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^e f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{g(1)}^{g(e)} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alternative Lösungsstragie: Wir führen eine neue Integrationsvariable ein, genannt u, die von x abhängt. Dabei wählt man u möglichst geschickt, so dass sich der Integrand vereinfacht. In diesem Beispiel wählen wir $u = \ln(x)$. Damit ist u also eine Funktion, die wir nach x ableiten können. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

Die rechte Seite ist zunächst nur eine rein formale Identität. Unter dem Integral können wir jetzt aber $\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$ ersetzen durch $u\mathrm{d}u$. Als Letztes müssen wir noch die Integralgrenzen ersetzen. Dazu setzen wir lediglich die Grenzen in die Funktion u ein, d.h. die untere Grenze ergibt sich zu $u(1) = 0$ und die obere Grenze zu $u(e) = 1$. Ingesamt ergibt sich damit

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u,$$

wie bereits oben gezeigt.
Ist man nicht nur am Wert des Integrals interessiert, sondern auch an der Stammfunktion, so kann man am Ende die Substitution wieder rückgängig machen.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{u=0}^{u=1} \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{x=1}^{x=e}.\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\frac{1}{2}\ln^2(x)$ tatsächlich eine Stammfunktion von $\ln(x)/x$ ist.

b) Wir setzen $u = x + 1$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$ bzw. $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Die Integralgrenzen ergeben sich zu $u(0) = 1$ und $u(1) = 2$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^2 u - 2 + \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln(u)\right]_{u=1}^{u=2} \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Wir setzen $x = \sin(t)$ mit $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t)$ bzw. $\mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t$. Die untere bzw. obere Integralgrenze ergibt sich zu $-\pi/2$ bzw. $\pi/2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt mit Hilfe von partieller Integration (vergleiche Aufgabe 31 b)).

Aufgabe 33 Es seien $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie folgende Identitäten für die Elastizitäten $E_f(x)$ bzw. $E_g(x)$ von $f(x)$ bzw. $g(x)$.

a) $E_{fg}(x) = E_f(x) + E_g(x)$.
b) $E_{\frac{1}{f}}(x) = -E_f(x)$.
c) $E_{\frac{f}{g}}(x) = E_f(x) - E_g(x)$.

Lösung zu Aufgabe 33

a)

$$\begin{aligned}E_{fg}(x) &= \frac{[f(x)g(x)]'}{f(x)g(x)} \cdot x \\ &= \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \cdot x \\ &= \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} \cdot x + \frac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \cdot x \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x + \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot x \\ &= E_f(x) + E_g(x).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}E_{\frac{1}{f}}(x) &= \frac{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'}{\frac{1}{f(x)}} \cdot x \\ &= -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \cdot f(x) \cdot x \\ &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \\ &= -E_f(x).\end{aligned}$$

c) Folgt sofort aus a) und b), denn

$$\begin{aligned} E_{\frac{f}{g}}(x) &= E_f(x) + E_{\frac{1}{g}}(x) && \text{wegen a)} \\ &= E_f(x) - E_g(x) && \text{wegen b).} \end{aligned}$$

Aufgabe 34

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 von $f(x) = \cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von $g(x) = \sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 34

a) Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k.$$

Die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rcrcrcr} f^{(0)}(x) &=& \cos(x) &\rightarrow& \cos(0) &=& 1 \\ f^{(1)}(x) &=& -\sin(x) &\rightarrow& -\sin(0) &=& 0 \\ f^{(2)}(x) &=& -\cos(x) &\rightarrow& -\cos(0) &=& -1 \\ f^{(3)}(x) &=& \sin(x) &\rightarrow& \sin(0) &=& 0 \\ f^{(4)}(x) &=& \cos(x) &\rightarrow& \cos(0) &=& 1. \end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

als Taylorpolynom vom Grad 4 für die Funktion $f(x) = \cos(x)$ um $x_0 = 0$. Mit einer (nicht einfachen) Abschätzung des Restglieds in der Taylorformel erhält man die Taylorreihe

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

b) Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k.$$

Die Ableitungen $g^{(k)}(1)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rcllcr} g^{(0)}(x) &=& \sqrt{x} &\rightarrow& g^{(0)}(1) = & 1 \\ g^{(1)}(x) &=& \frac{1}{2}x^{-1/2} &\rightarrow& g^{(1)}(1) = & \frac{1}{2} \\ g^{(2)}(x) &=& -\frac{1}{4}x^{-3/2} &\rightarrow& g^{(2)}(1) = & -\frac{1}{4} \\ g^{(3)}(x) &=& \frac{3}{8}x^{-5/2} &\rightarrow& g^{(3)}(1) = & \frac{3}{8}. \end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

als Taylorpolynom vom Grad 3 für die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ um $x_0 = 1$.