Aufgabe 27 Eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt eine Lösung der Wellengleichung, wenn für ihre zweiten partiellen Ableitungen folgende Gleichheit gilt
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$
Dabei ist $c > 0$ eine reelle Konstante. Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = \cos(ky - \omega x)$ mit Konstanten $k, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega > 0$. Für welche Wahl der Konstanten k, ω ist f eine Lösung der Wellengleichung?

Lösung zu Aufgabe 27 Bildet man die partiellen Ableitungen erhält man
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(kx - \omega y) \cdot \omega^2,$$
bzw.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(kx - \omega y) \cdot k^2,$$
Dies liefert $\omega^2 = c^2 \cdot k^2$ bzw. $\omega = c \cdot |k|$.

Aufgabe 28 Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

a) $f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \ln(xy) - xy^3.$
b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = x \cdot e^{-y^2}.$
c) $h\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) = \dfrac{\cos(xy)}{x^2 y}$ (hier nur die ersten partiellen Ableitungen).

Lösung zu Aufgabe 28

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x} - y^3; \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y} - 3xy^2; \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3y^2$
b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^{-y^2}; \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2xy \cdot e^{-y^2}; \qquad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = -2y \cdot e^{-y^2}$
c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-\sin(xy) \cdot xy - 2\cos(xy)}{x^3 y}; \qquad \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\sin(xy) \cdot xy - \cos(xy)}{x^2 y^2}$

Aufgabe 29 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^2 x^3 - 2x + 1 \,\mathrm{d}x.$
b) $\displaystyle\int_0^1 e^x + e^{-x} \,\mathrm{d}x.$
c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) \,\mathrm{d}x.$

Lösung zu Aufgabe 29

a) Eine Stammfunktion ist $\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 x^3 - 2x + 1\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x\right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \left(\frac{1}{4}2^4 - 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{4}1^4 - 1^2 + 1\right) = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

b) Eine Stammfunktion ist $e^x - e^{-x}$. Einsetzen liefert

$$\int\limits_0^1 e^x + e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x - e^{-x}\right]_{x=0}^{x=1} = e - \frac{1}{e}.$$

c) Eine Stammfunktion ist $-\cos(x)$. Einsetzen liefert

$$\int\limits_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = 2.$$

Aufgabe 30 Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $[a, b]$ ein Intervall. Leiten Sie die folgende Formel für die *partielle Integration* her.

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Hinweis: Benutzen Sie die Produktregel aus der Differentialrechnung für die Funktion $f(x)g(x)$ und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Lösung zu Aufgabe 30 Leitet man die Funktion $f(x)g(x)$ ab, so gilt aufgrund der Produktregel

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Die Funktion $f(x)g(x)$ ist eine Stammfunktion von $[f(x)g(x)]'$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} &= \int\limits_a^b [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Knobelaufgabe Finden Sie eine Stammfunktion für folgende Funktionen

$$f(x) = xe^{(x^2)}; \qquad g(x) = \sin(x)\cos(x); \qquad h(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \text{für } x > 1 \text{ und festes } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung zu Aufgabe 30

- Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist $\frac{1}{2}e^{(x^2)}$.
- Eine Stammfunktion von $g(x)$ ist $\frac{1}{2}\sin^2(x)$. Es ist aber auch $-\frac{1}{2}\cos^2(x)$ eine Stammfunktion. Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Satz des Pythagoras) unterscheiden sich die beiden Stammfunktionen nur um eine Konstante.

- Die Funktion $h(x)$ lässt sich mit der Formel für die geometrische Summe (siehe Skript, Kapitel 2.4) schreiben als

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k}$$

eine Stammfunktion von h.