

Aufgabe 23

- In einer Nährlösung befinden sich Hefezellen. Das Wachstum lässt sich durch eine Funktion der Form $t \mapsto K_0 \cdot e^{at}$ beschreiben, wobei K_0 die Anzahl der Zellen zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt. Nach 9 Stunden habe sich die Anzahl verzehnfacht. Bestimmen Sie die Wachstumsrate a , wenn als Zeiteinheit Stunden verwendet werden.
- Das Plutonium-Isotop ^{239}Pu hat eine Halbwertszeit von 24.110 Jahren. Berechnen Sie, welcher Prozentsatz nach 100 Jahren zerfallen ist.
- Lässt sich eine 4,20m lange, gerade Stange in einem quaderförmigen Container mit den Innenabmessungen L 3,20m B 1,80m H 1,80m verstauen, ohne sie zu verbiegen?

Lösung zu Aufgabe 23

- Es gilt $e^{9a} = 10$, also $a = \frac{1}{9} \ln(10) \approx 0,3$.
- Es gilt $K_{24110} = K_0 \cdot e^{24110a} = \frac{1}{2}$ und somit

$$K_{100} = K_0 \cdot e^{\frac{1}{24110} \ln(0,5)} \approx 0,997 \cdot K_0.$$

Nach 100 Jahren sind somit 0,3% zerfallen.

- Mit der Formel für die Euklidische Norm aus der Vorlesung erhält man, dass die Raumdiagonale eine Länge von $\sqrt{3,2^2 + 1,8^2 + 1,8^2} = 4,08$ Meter hat. Die Stange lässt sich also nicht in dem Container verstauen.

Aufgabe 24 Sei die folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

$$f(x, y) = \begin{cases} \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0); \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Begründen Sie, warum die Funktionen $x \mapsto f(x, y)$ und $y \mapsto f(x, y)$, die man erhält, wenn man f auf achsenparallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ einschränkt, stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.
- Sei eine Folge im $\mathbb{R}^2$ definiert durch $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Konvergiert die Folge $f(a_n)$, und wenn ja, was ist der Limes?
- Entscheiden Sie, ob f stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 24

- Für achsenparallele Geraden, die nicht durch den Nullpunkt gehen, ist die Aussage klar. Für die Funktion $x \mapsto f(x, 0)$ und $x \neq 0$ gilt $x \mapsto \frac{x^2}{x^2} = 1$, also ist die Funktion auch bei 0 stetig. Außerdem gilt für $y \mapsto f(0, y) = \left| \frac{-y^2}{y^2} \right| = 1$ für $y \neq 0$, somit ist auch diese Funktion stetig, auch bei $y = 0$.
- Es gilt

$$f(a_n) = \left| \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right| = \frac{0}{1} = 0,$$

Die Folge $f(a_n)$ ist also konstant gleich Null und konvergiert somit gegen Null.

- c) Die Funktion f ist nicht stetig, denn sonst müsste für die Folge a_n , die gegen Null geht, die Folge der Funktionswerte $f(a_n)$ gegen den Funktionswert $f(0, 0) = 1$ konvergieren.

Aufgabe 25 Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y, z) = y \cdot e^x \cdot \sin(x) + e^{\cos(z)}$.

- Berechnen Sie: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$.
- Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z)$. Vergleichen Sie Ihre beiden Ergebnisse.
- Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. Entscheiden Sie, welche der beiden folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ harmonisch ist:

$$f(x, y) = e^x \cdot \cos(y), \quad g(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y).$$

Lösung zu Aufgabe 25

- Man erhält: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y \cdot e^x \cdot \sin(x) + y \cdot e^x \cdot \cos(x) = y \cdot e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$;
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^x \cdot \sin(x)$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -e^{\cos(z)} \cdot \sin(z)$.
- Man erhält beide Male das selbe Ergebnis $e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$, wie das Lemma von Schwarz besagt.
- Wir berechnen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^x \cdot \cos(y) - e^x \cdot \cos(y) = 0.$$

Die Funktion f ist also harmonisch. Für die andere Funktion gilt

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \cos(y) = -2 \sin(x) \cdot \cos(y),$$

diese Funktion ist nicht konstant gleich Null, also ist g nicht harmonisch.

Aufgabe 26 Betrachten Sie die folgenden Funktionen $(0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y;$$

$$g: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = xy.$$

Skizzieren Sie die "Höhenlinien", auf denen die Funktion jeweils konstant ist.

Lösung zu Aufgabe 26

- Löst man die Gleichung $x + y = c$ nach y auf erhält man $y = c - x$, die "Höhenlinien" zur Funktion f sind also die Parallelen zur Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten.
- Löst man $xy = c$ nach y auf, erhält man $y = \frac{c}{x}$, die "Höhenlinien" sind hier also Hyperbeln.